Számítási módszerek a fizikában 1, 8. hét

I. Determinánsszámítás.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $(x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & \ln 1 & \ln 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$

2. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ paraméterek esetén legyen $A_{ij} = b + (a - b)\delta_{ij}$ egy $n \times n$-es mátrix. Számoljuk ki $\det A$ értékét.

3. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot. Határozzuk meg $\det(A^{-1})$, $\det(A^{80})$, $\det(3A)$, $\det(A + I)$ és $\det(A^T)$ értékét.

4*. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ paraméterek esetén legyen $A_{ij} = b\delta_{ij} + c\delta_{i,j-1} + a\delta_{i,j+1}$ egy $n \times n$-es mátrix. Számoljuk ki $\det A$ értékét.

II. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

III. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket (ahol $s \in \mathbb{R}$).

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + sx_3 = 0 \\ x_1 + sx_2 + x_3 = 0 \\ sx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 6 \\ 7x_1 + 8x_2 = 9 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases}$

IV. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén van az alábbi egyenletrendszereknek nulla, pontosan egy, illetve végtelen sok megoldása? Adjuk is meg ezekben az esetekben az egyenletrendszer megoldását.

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y + z + 2v = 1 \\ x + 2y + z + v = 2 \\ 2x + by + z - v = 3 \\ 2x + 2y - z - v = a \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + y + 3z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$