Számítási módszerek a fizikában 1, 9. hét

I. A V vektorteret az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben az $(e_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal koordinátázzuk a $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben pedig az $(f_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal. Amennyiben a T lineáris leképzést a $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ mátrixszal reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben határozzuk meg T mátrixát $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben az alábbi esetekben.

1. $V=\mathbb{R}^2$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $f_1=(1,1)$, $f_2=(1,2)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
2. $V=\mathbb{R}^2$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $f_1=(1,1)$, $f_2=(1,-1)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$
3. $V=\mathbb{R}^3$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$, $f_1=(1,1,1)$, $f_2=(2,2,1)$, $f_3=(1,2,4)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

A fenti példák alapján fogalmazzuk meg precízen és igazoljuk *a determináns és a nyom bázisfüggetlen* kijelentést.

II. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorai!

$$\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&-3\\2&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-2&-8&-12\\1&4&4\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\2&0&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}$$

III. Tekintsük az $A=\begin{pmatrix}5&3&-2\\3&5&-2\\-2&-2&10\end{pmatrix}$ mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit és $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait.
2. Írjuk fel az A mátrixot $S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}S$ alakban.
3. Minden v_i $(i=1,2,3)$ sajátvektorhoz határozzuk meg azt a P_i projekciót, mely az origón átmenő v_i irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.
4. Mutassuk meg, hogy $A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$ teljesül.

IV. Tegyük fel, hogy két $m\in\mathbb{R}^+$ tömegű pontszerű részecske egy egyenes mentén mindenféle surlódás nélkül elmozdulhat és közöttük egy $h\in\mathbb{R}^+$ nyugalmi hosszúságú és $D\in\mathbb{R}^+$ direkciós erejű rugó van. Az egyik, illetve másik részecske helyét az idő függvényében az x_1 és az x_2 függvény írja le. Tegyük fel, hogy $x_1(0)=0$ és $x_2(0)>0$.

1. Mutassuk meg, hogy az $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ mátrix, az $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$, a $\alpha=\dfrac{D}{m}$ és a $d=\alpha h\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ vektorok segítségével a mozgásegyenlet felírható az $\ddot{x}(t)=Ax(t)+d$ alakban.
2. Igazoljuk, hogy a $z(t)=x(t)+h\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ változó bevezetésével a mozgásegyenlet a $\ddot{z}(t)=\alpha Az(t)$ alakra hozható.
3. Tegyük fel, hogy a mozgásegyenletnek a $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ függvény egy megoldása. Mutassuk meg, hogy minden $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ paraméter esetén $\tilde{z}(t)=z(t)+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ is megoldása a mozgásegyenletnek. Fizikailag hogyan interpretálnánk ezt a jelenséget?
4. Határozzuk meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorai.
5. Adjuk meg, hogy a sajátvektorokra milyen differenciálegyenlet teljesül.
6. Oldjuk meg a sajátvektorokra adódó differenciálegyenleteket.