Számítási módszerek a fizikában 1, 12. hét

I. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ teret az euklidészi skaláris szorzással és azt az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A pozitív definit.
2. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan pozív mátrix létezik, melynek a négyzete A. (Ennek a jele $A^{\frac{1}{2}}$.)
3. Számoljuk ki az $A^{\frac{1}{2}}$ mátrixot.
4. Hány olyan (valós) mátrix van, melynek a négyzete A?

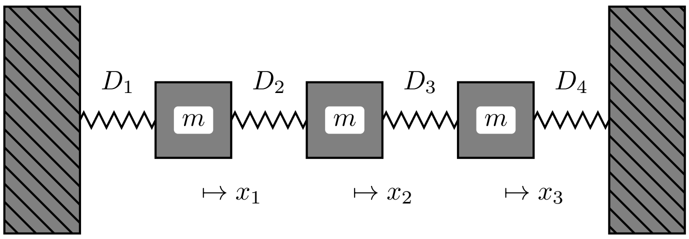
II. Rendezés az önadjungált mátrixok halmazán.

1. Adjunk meg olyan A, B önadjungált 2×2-es mátrixokat, melyre $A \nleq B$ és $B \nleq A$ teljesül.
2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $A \leq B$ és $A^2 \nleq B^2$.
3. Legyen P, Q $n \times n$-es komplex projekció. Mutassuk meg, hogy

$$P \leq Q \Longleftrightarrow P = PQ \Longleftrightarrow P = QP$$

teljesül.

III*. Tekintsük az alábbi ábrán látható rugós rendszert.



1. Mutassuk meg, hogy a tömegpontok mozgásegyenlete

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + D_1 x_1 - D_2(x_2 - x_1) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + D_2(x_2 - x_1) - D_3(x_3 - x_2) &= 0 \\ m\ddot{x}_3 + D_3(x_3 - x_2) + D_4 x_3 &= 0, \end{aligned}$$

amit az összevont $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektoros jelöléssel az alábbi formában is felírhatunk.

$$\ddot{x} + Ax = 0 \qquad A = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} D_1 + D_2 & -D_2 & 0 \\ -D_2 & D_2 + D_3 & -D_3 \\ 0 & -D_3 & D_3 + D_4 \end{pmatrix}$$

2. Az A mátrix sajátértékeinek a gyökeit nevezzük a rendszer saját-körfrekvenciáinak (ω), melyekből a sajátfrekvencia a 2π számmal való osztással kapható ($f = \frac{\omega}{2\pi}$). Mutassa meg, hogy a $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D$ esetben az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 2\frac{D}{m}$, $\lambda_{2,3} = (2 \pm \sqrt{2})\frac{D}{m}$, vagyis a rendszer sajátfrekvenciái

$$f_1 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{D}{2m}}, \qquad f_{2,3} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2 \pm \sqrt{2})D}{m}}.$$

3. Adott $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $A_n(a)$ az az $n \times n$-es mátrix mely elemeire minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$A_n(a)_{ij} = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad i = j \\ -1, & \text{ha} \quad |i-j| = 1; \\ 0, & \text{ha} \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy ha n db. m tömegű testet helyezünk el a fenti ábrához hasonló módon azonos D direkciós állandójú rugókat használva, akkor a rendszer mozgásegyenlete az $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektorral az $\ddot{x} + \frac{D}{m} A_n(2) x = 0$ formában is felírható.

4. Tegyük fel, hogy egy $\alpha : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozat elemeire minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} - \alpha_n$ teljesül valamilyen $a \in \mathbb{R}$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\alpha_n = \begin{cases} c_1 \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^n, & \text{ha} \quad |a| \neq 2; \\ c_1 + c_2 n, & \text{ha} \quad a = 2; \\ (-1)^n (c_1 + c_2 n), & \text{ha} \quad a = -2 \end{cases}$$

5. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $A_n(a)$ mátrix determinánsára

$$\det A_{n+2}(a) = a \det A_{n+1}(a) - \det A_n(a)$$

teljesül.

6. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $A_n(a)$ mátrix determinánsára

$$\det A_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4}} \left[\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^{-n-1} \right], & \text{ha} \quad |a| \neq 2; \\ n + 1, & \text{ha} \quad a = 2; \\ (-1)^n (n+1), & \text{ha} \quad a = -2 \end{cases}$$

teljesül.

7. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük a $\det A_n(a) = 0$ sajátérték egyenletet. Mutassuk meg, hogy ebből $|a| \neq 2$ és

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \exp\left(2\pi \mathrm{i} \frac{k}{2n+2} \right), \qquad k \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$$

következik. Vagyis

$$a = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$

8. Mutassuk meg, hogy ha n db. m tömegű testet helyezünk el az ábrához hasonló módon azonos D direkciós állandójú rugókat használva, akkor a rendszer sajátfrekvenciái

$$f_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{D}{2m} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right)}, \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$