Számítási módszerek a fizikában 1, 13. hét

I. Az alábbi U_1 és U_2 halmazokat ábrázoljuk vázlatosan és határozzuk meg a területüket azzal a segítséggel, hogy az $a, b \in \mathbb{R}^+$ féltengelyű ellipszis területe az $\mathbb{R}^2$ euklidészi térben $T = ab\pi$.

$$U_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 3x^2 - 2xy + 3y^2 \leq 1\right\}$$

$$U_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y \leq 1\right\}$$

II. Határozzuk meg az alábbi Ω_1 és Ω_2 halmazok térfogatát (ahol $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter) azzal a segítséggel, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ féltengelyű ellipszoid térfogata az $\mathbb{R}^3$ euklidészi térben $V = \dfrac{4\pi abc}{3}$.

$$\Omega_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz \leq R^2\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz + 16x - 8y + 20z + 30 \leq R^2\right\}$$

III. Az $\mathbb{R}^n$ euklidészi térben minden $\mathcal{O}$ $n \times n$-es ortogonális mátrix és $a \in \mathbb{R}^n$ esetén tekintsük az

$$\varphi_{\mathcal{O},a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \mathcal{O}x + a$$

transzformációt.

1. Mutassuk meg, hogy az $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha(x) = (x, 1)$ leképezés segítségével $\varphi_{\mathcal{O},a}$ hatása az alábbi módon is felírható.

$$x \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{O} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}x + a \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{O}x + a$$

2. Adott $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ortogonális mátrixok és a_1, a_2 vektorok esetén, mely $\mathcal{O}$ mátrixra és a vektorra fog teljesülni az $\varphi_{\mathcal{O}_2,a_2}\varphi_{\mathcal{O}_1,a_1} = \varphi_{\mathcal{O},a}$ egyenlőség?
3. Adott $\mathcal{O}$ ortogonális mátrix és a vektor esetén mi lesz $\varphi^{-1}_{\mathcal{O},a}$?

IV. Tekintsük az alábbi mátrixokat

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

melyek közül az utolsó hármat *Pauli-mátrixok*nak nevezik és a

$$\mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{k=1}^{3} x_k \sigma_k$$

leképezést, melynek értékét az $x \in \mathbb{R}^3$ vektoron $x \cdot \sigma$ jelöli.

1. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$(x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) = \langle x, y \rangle \sigma_0 + \mathrm{i}(x \times y) \cdot \sigma$$
$$[(x \cdot \sigma), (y \cdot \sigma)] = 2 \langle x, y \rangle \sigma_0$$

   teljesül, ahol $[A, B] = AB - BA$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^3$ esetén az $t\sigma_0 + x \cdot \sigma$ mátrix determinánsa $t^2 - \langle x, x \rangle$.

V. Legyen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ önadjungált mátrix. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ paraméter estén az $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tA}$ mátrix unitér.

VI* Jelölje $\mathrm{SO}(3)$ a 3×3-as valós ortogonális egységnyi determinánsú mátrixok halmazát, továbbá vezessük be a $G = \mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ jelölést. Minden $(R, v, a, \tau)\in G$ esetén legyen

$$\varphi_{R,v,a,\tau} : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \qquad (x,t)\mapsto (Rx + tv + a, t+\tau).$$

1. Gondoljuk meg, hogy a tér (x) és az idő (t) koordináták milyen transzformációját modellezi a fenti leképezés.
2. Mutassuk meg, hogy az $\alpha : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\alpha(x,t) = (x,t,1)$ leképezés segítségével $\varphi_{R,v,a,\tau}$ hatása az alábbi módon is felírható.

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R & v & a \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx + tv + a \\ t+\tau \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \begin{pmatrix} Rx + tv + a \\ t+\tau \end{pmatrix}$$

3. Adott $(R_1, v_1, a_1, \tau_1), (R_2, v_2, a_2, \tau_2)\in G$ elemek esetén, mely $(R, v, a, \tau)\in G$ elemre fog teljesülni az $\varphi_{R_2,v_2,a_2,\tau_2}\varphi_{R_1,v_1,a_1,\tau_1} = \varphi_{R,v,a,\tau}$ egyenlőség?
4. Adott $(R, v, a, \tau)\in G$ esetén mi lesz $\varphi^{-1}_{R,v,a,\tau}$?

A fenti G halmazt az utolsó feladatokban kiszámolt szorzás és inverz képzéssel *Galilei-csoport*nak nevezzük.