Számítási módszerek a fizikában 1.

2. zárthelyi dolgozat

2022. 11. 28. 14.15-16.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. A $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren jelölje $\mathcal{A}$ az $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ bázist, valamint $\mathcal{B}$ az $f_1 = (-1, 1)$, $f_2 = (-2, 1)$ bázist. Egy $T : V \to V$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$ bázisban *(6 p.)*

$$T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Írja fel a T leképezés mátrixát a $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$ bázisban.

2. Tekintsük a következő egyenletrendszert, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter. *(7+3 p.)*

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = b \\ x + ay - z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

a.) Az a és b paraméter mely értéke esetén lesz az egyenletrendszernek nulla, egy illetve végtelen sok megoldása.

b.) Adja meg az egyenletrendszer megoldását a fenti esetekben.

3. Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Számolja ki a C^{-1} mátrixot. *(10 p.)*

4. Tekintsük az alábbi mátrixot. *(10 p.)*

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a.) Határozza meg a B mátrix determinánsát.

b.) Igazolja, hogy a B mátrix mindegyik sajátértéke valós és nagyobb nullánál.

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, valamint $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\pi x)$. *(4×5 p.)*

a.) Határozza meg az A mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó v_1, v_2, v_3 sajátvektorokat.

b.) Adja meg a v_i vektor által meghatározott egyenesre való ortogonális vetítés P_i mátrixát az $i = 1, 2, 3$ esetben.

c.) Adja meg az A mátrix spektrálfelbontását.

d.) Számolja ki az $f(A)$ mátrixot.