Matematika A1a – Analízis, 1. hét

Halmazalgebra és teljes indukció

I. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
6. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
7. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
8. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

II. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$
4. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
5. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
6. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$
8. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
9. Legyen $d \in \mathbb{R}$ és $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ az a sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = a_1 + (n-1)d$ teljesül. (Az ilyen sorozatot nevezzük számtani sorozatnak.) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big)$$
teljesül.
10. Legyen $q \in \mathbb{R}$ és $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ az a sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = a_1 q^{n-1}$ teljesül. (Az ilyen sorozatot nevezzük mértani sorozatnak.) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, & \text{ha} \quad q \neq 1; \\ na_1, & \text{ha} \quad q = 1. \end{cases}$$

III. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. Ha $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ és $x \neq 0$, valamint $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $(1+x)^n > 1 + nx$ teljesül.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
3. Ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ akkor
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$

4. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Igazoljuk a számtani- és mértani-közép közötti egyenlőtlenséget.
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

IV. Binomiális kifejtés.

1. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, ahol $k < n$. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$