Matematika A1a – Analízis, 2. hét

Komplex számok I.

I. Legyen $z_1 = 3 - 4\,\mathrm{i}$ és $z_2 = 2 + \mathrm{i}$. Írjuk fel az alábbi számokat algebrai alakban.

$$3z_1 - 4\,\mathrm{i} + 2z_2 + 4 \qquad 2z_1 + z_2^2 \qquad \bar{z}_2 - |z_1| \qquad 2z_1z_2 - \frac{5z_1}{z_2}$$

II. Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket.

1. $(2 + 4\,\mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})\,\mathrm{i}$
2. $3\,\mathrm{i} + \dfrac{25}{4 + 3\,\mathrm{i}}$
3. $\mathrm{i} + \dfrac{3}{1 + (1 + \mathrm{i})(1 + 2\,\mathrm{i})}$
4. $\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^7$
5. $(1 + \mathrm{i})^{12}$
6. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{i}\right)^{-6}$

III. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. $\sqrt{8}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$
2. $4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$
3. $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
4. $\dfrac{(1 + \mathrm{i})(1 - 2\,\mathrm{i})}{\mathrm{i}(1 - \mathrm{i})}$

IV. Írjuk fel trigonometrikus alakban az alábbi számokat.

1. $-4\,\mathrm{i}$
2. $3 + 3\,\mathrm{i}$
3. -2
4. $\sqrt{6} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

V. A következő számokat írjuk fel algebrai alakban.

1. $(1 + \mathrm{i})^8$
2. $(1 - \mathrm{i})^4$
3. $(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^3$
4. $\dfrac{(1 + \mathrm{i})^{10}}{(-1 + \mathrm{i})^5}$

VI. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

1. $z^2 - 4z + 13 = 0$
2. $z^2 = \bar{z}$
3. $|z| - z = 1 + 2\,\mathrm{i}$
4. $z^2 + (1 + \mathrm{i})\bar{z} + 4\,\mathrm{i} = 0$

VII. Milyen görbéket határoznak meg a komplex számsíkon az alábbi egyenletek?

$$|z - (1 + 2\,\mathrm{i})| = 3 \qquad z + \bar{z} = z\bar{z} \qquad |z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$$

VIII. Tekintsük az alábbi függvényeket.

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto a \\
\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto b \\
\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i} \\
|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} & a + b\,\mathrm{i} \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}
\end{array}
$$

Igazoljuk a következőket.

1. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ és $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$.
2. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,z_1 + \mathrm{Re}\,z_2$ és $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,z_1 + \mathrm{Im}\,z_2$.
3. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
4. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
5. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z\bar{z} = |z|^2$.
6. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $z \neq 0$ esetén
$$z\left(\frac{\mathrm{Re}\,z}{|z|^2} - \frac{\mathrm{Im}\,z}{|z|^2}\,\mathrm{i}\right) = 1.$$
7. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $|z| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $z = 0$.
8. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
9. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
10. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
11. Minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$.
12. Minden $z \in \mathbb{C}$ számhoz létezik olyan $v \in \mathbb{C}$ szám, melyre $z = v^2$ teljesül.