

Matematika A1a – Analízis, 3. hét

Vektorok skaláris és vektoriális szorzata

I. Mi lesz az alábbi vektorok vektoriális- és skaláris szorzata, valamint mekkora a közbezárt szög?

1. $(1, 2, 2)$ $(2, 1, 2)$
2. $(1, 4, 8)$ $(5, 2, 14)$
3. $(1, 1, 1)$ $(1, 0, 0)$

II. Igazoljuk, hogy az \mathbb{R}^n térben minden $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra az alábbiak teljesülnek.

1. $(x + y) \perp (x - y) \iff \|x\| = \|y\|$
2. $(\|x\| = \|y\| = 1 \wedge x \perp y) \Rightarrow \|x - y\| = \sqrt{2}$
3. Ha x_1, x_2, x_3, x_4 ortonormált rendszer, akkor a

$$x_1 + x_2, (x_1 - x_2), (x_3 + x_4), (x_3 - x_4)$$

vektornégyes ortogonális rendszert alkot.

III. Egy háromszög csúcsaiba mutató vektorok: $(5, 4, 1)$, $(1, 6, 2)$ és $(1, 2, 0)$. Mekkora a háromszög kerülete és területe?

IV. Mi lesz az $(1, 2, -1)$ és a $(-1, -2, 0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete?

V. Mi lesz az $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 0, 1)$ pontokat tartalmazó sík egyenlete?

VI. Mi lesz az $(1, 2, 3)$ pontot tartalmazó $(2, -4, 5)$ vektorra merőleges sík egyenlete?

VII. Egy síkban vannak-e az $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorok?

VIII. Egy hasáb egyik csúcsának koordinátái $(2, 1, 0)$. Ebből a csúcsból kiinduló élek végpontjai $(2, 2, 1)$, $(6, 3, 3)$ és $(2, 2, 5)$. Mekkora a hasáb térfogata?

IX. Mi lesz az $x - y - z = 1$ és $x + 2y + z = 0$ síkok metszéspontjának az egyenlete?

X. Mi lesz az egyenlete annak az egyenesnek, ami átmegy az

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 2 - t \\ z(t) = -1 + 2t \end{cases}$$

egyenes és a $2x + 2y - z = 1$ sík közös pontján, valamint merőleges a síkra?

XI. Bizonyítsuk be, hogy az

$$e_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \quad e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \quad e_3 = (0, 0, -1)$$

vektorok ortonormált bázist alkotnak az \mathbb{R}^3 térben. Hogyan lehet felírni ebben a bázisban az $x = (1, \sqrt{3}, 1)$ vektort az

$$x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i$$

alakban?