

Matematika A1a – Analízis, 5. hét

Sorozatok határértéke definíció alapján és rekurzív sorozatok határértéke

I. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $K = 100$ korláthoz.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

II. Mutassuk meg az alábbi határértékeket a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $\varepsilon = 10^{-3}$ korláthoz.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 3}{2n + 1} = 4$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n - 5}{2n^2 + 2n + 2} = 3$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n} + \sin n}{n + 2} = 2$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - n = 1$

III. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 3\sqrt{n} - 9)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$

IV. Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n} \right)$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n} \right)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 3} - \sqrt{n^2 + an + 1} \right) \quad (a \in \mathbb{R})$

V. Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}, a_1 = 4$
2. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, a_1 = 1$ és $a_1 = 5$
3. $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = 1$