Matematika A1a – Analízis, 6. hét

Speciális sorozatok határértéke, valamint legkisebb és legnagyobb torlódási pontja

I. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+100}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-100}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$

II. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2014^n+2015^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+2^n}{2+3^n}}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{3\cdot 2^n+1}{5\cdot 2^n+3}}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+3\cdot 5^n}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{3^n+4^n}{5^n n^5}}$

III. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{3n+1}\right)^{2n} = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{1-2n}\right)^{n+3} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{3-n^2}\right)^{-2n^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^4}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n} = \sqrt[5]{\mathrm{e}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^{n} = 0$

IV. Határozzuk meg a következő $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatok esetén $\limsup a$ és $\liminf a$ értékét!

1. $a_n = \frac{2n^2-3}{n^2+n+8}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
2. $a_n = \sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$
3. $a_n = \frac{4-n^2}{n+3}$
4. $a_n = \left(\frac{3-n}{5+n}\right)\cdot\left(\frac{4n-1}{2n+5}\right)^3$