Matematika A1a – Analízis, 7. hét

Függvények határértéke

I. Vizsgáljuk monotonitás, paritás, korlátosság, periodicitás szempontjából az alábbi függvényeket.

1. $3x^2 - 9x + 1$ 2. $\dfrac{1}{1+x^2}$ 3. $\sin^2(\pi x)$
4. $\sin\left(x^2\right)$ 5. $\sin^2(x)$ 6. $2^x + \dfrac{1}{2^x}$

II. Hiperbolikus függvények.

1. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az alábbiak teljesülnek.
   $\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1$ $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$
   $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)$
   $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$
2. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $z = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ az $\operatorname{sh}(z) = x$ egyenlet egyetlen megoldása.
3. Tetszőleges $x \in [1, \infty[$ esetén $z = \pm\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ a $\operatorname{ch}(z) = x$ egyenlet megoldása(i).
4. Tetszőleges $x \in \,]-1, 1[$ esetén $z = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ a $\operatorname{th}(z) = x$ egyenlet egyetlen megoldása.

III. Az adott $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, $a \in \mathbb{R}$ ponthoz és $A \in \mathbb{R}$ számhoz keressünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \qquad 0 < |x - a| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

teljesül, ahol $\varepsilon = 10^{-2}$.

1. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$, $a = 2$, $A = 1$
2. $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $a = 3$, $A = 3$
3. $f(x) = x^2 + 3x + 3$, $a = -1$, $A = 1$

IV. Definíció alapján igazoljuk az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$ 2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-3}{x+1} = 2$
3. $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 + 3x - 1) = -3$ 4. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+2}{(x+3)^2} = \infty$

V. Keressük meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{9+x}-3}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (7x^9 - x^4 + 3x^2 + 1)$ 6. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+9x^2+27x+27}$