

Matematika A1a – Analízis, 8. hét

Függvények folytonossága

I. Igazoljuk a folytonosság definíciója alapján, hogy az alábbi függvények folytonosak.

$$f(x) = x^2 + 3x + 5 \quad g(x) = \sqrt{x} \quad h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

II. Bolzano-tétel.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre $\text{Ran } f = [a, b]$ teljesül, akkor létezik olyan $x_0 \in [a, b]$, melyre $f(x_0) = x_0$.
3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ szám, melyre $x_0 \sin x_0 = \frac{\pi}{4}$.

III. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \frac{1}{x}$, a $g(x) = x^2$ és a $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény a $]0, 1]$, $[1, 2]$ és a $]0, \infty[$ intervallumon?

VI. Számoljuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1}$	2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$	3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-3x}}{x^2 + 2x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x}$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{3x}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{4x} - 1}$	9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$