Matematika A1a – Analízis, 10. hét

Differenciálszámítás alkalmazása

I. Számoljuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3}{\mathrm{e}^{2x}}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos(x)}{x\sin(2x)}$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(2x-1)}{\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{\operatorname{tg}(5x)}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}$
6. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln(x)$
8. $\lim\limits_{x\to+0} x^x$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

II. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3\,\mathrm{e}^{-x}$ és a $g(x)=x-2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+x}$ függvényen.

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\operatorname{Dom} f$ halmaz határpontjaiban, hol monoton növő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

III. Adjuk meg az alábbi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények x_0 pontbeli érintőjének az egyenletét.

1. $f(x)=x^2 \quad x_0=4$
2. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1} \quad x_0=2$
3. $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2} \quad x_0=\dfrac{1}{2}$
4. $f(x)=\sin x^2 \quad x_0=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

IV. Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-3x}$ függvénynek a $[0,1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

V. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T\in\mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K\in\mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r\in\mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r\in\mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V\in\mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V\in\mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkorák legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?