

Matematika A1a – Analízis, 11–12. hét

Határozatlan integrál

I. Számítsuk ki a következő integrálokat.

| | | |
|--|-------------------------------------|---|
| 1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$ | 2. $\int \frac{1}{x^2} dx$ | 3. $\int 1 + e^{x-1} dx$ |
| 4. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$ | 5. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | 6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ |
| 7. $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$ | 8. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ | 9. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} dx$ |
| 10. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} dx$ | 11. $\int \operatorname{sh}(x) dx$ | 12. $\int \operatorname{ch}(x) dx$ |

II. Parciális integrálás segítségével határozzuk meg az alábbi integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

| | | |
|---------------------------------------|--|----------------------------|
| 1. $\int x e^{ax} dx$ | 2. $\int x^2 e^{-ax} dx$ | 3. $\int x \sin(x) dx$ |
| 4. $\int e^{ax} \sin(bx) dx$ | 5. $\int e^x \cos(x) dx$ | 6. $\int \sqrt{1-x^2} dx$ |
| 7. $\int \sqrt{1+x^2} dx$ | 8. $\int \sqrt{x^2-1} dx$ | 9. $\int \arcsin(x) dx$ |
| 10. $\int \operatorname{arctg}(x) dx$ | 11. $\int x \operatorname{arctg}(ax) dx$ | 12. $\int x^3 \ln^2(x) dx$ |

III. Racionális törtfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályt alkalmazva határozzuk meg az alábbi integrálokat.

| | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ | 2. $\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx$ | 3. $\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx$ |
| 4. $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3} dx$ | 5. $\int \frac{1}{x^3+1} dx$ | 6. $\int \frac{x^4}{(x-2)(x-3)(x-4)} dx$ |
| 7. $\int \frac{16x^2+4x}{x^4+4} dx$ | 8. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx$ | 9. $\int \frac{x^4+4}{x^3-1} dx$ |
| 10. $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$ | 11. $\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} dx$ | 12. $\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2} dx$ |

IV. Alkalmos helyettesítéssel határozzuk meg az alábbi integrálokat, ahol $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \frac{x^3}{(x+2)^4} dx & 2. \int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^3} dx & 3. \int x \sqrt[4]{x-1} dx \\
 4. \int \frac{e^{4x}}{1+e^x} dx & 5. \int \sqrt{e^x-1} dx & 6. \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx \\
 7. \int \sqrt{1-x^2} dx & 8. \int \sin^k(x) \cdot \cos(x) dx & 9. \int \cos^k(x) \cdot \sin(x) dx \\
 10. \int \operatorname{ctg}(x) dx & 11. \int \operatorname{tg}(x) dx & 12. \int \operatorname{tg}^2(x) dx \\
 13. \int \operatorname{tg}^4(x) dx & 14. \int \frac{2}{e^{3x}-e^x} dx & 15. \int \frac{1}{x + \sqrt{x-1} - 1} dx
 \end{array}$$

V. A $t = \operatorname{tg}(x)$ helyettesítéssel vezessük vissza a következő integrálokat racionális törtfüggvények integráljaira, majd számoljuk ki az integrálokat.

$$\begin{array}{ll}
 1. \int \frac{1}{\operatorname{tg}(x)-1} dx & 2. \int \frac{1}{\sin^2(x) + \sin(2x)} dx \\
 3. \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2(x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x)} dx & 4. \int \frac{1}{1 + 3 \cos^2(x)} dx
 \end{array}$$

VI. A következő integrálok kiszámításához gondoljunk az elemi függvények (\sin , tg , \exp , arctg , arcsin ,...) deriváltjára és a deriválásnál megismert láncszabályra.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int x e^{-x^2} dx & 2. \int \frac{3^x}{1+9^x} dx & 3. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \\
 4. \int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx & 5. \int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx & 6. \int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx
 \end{array}$$

VII. Trigonometrikus azonosságok segítségével számoljuk ki az alábbi határozatlan integrálokat.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \cos(2x) \cos(5x) dx & 2. \int \cos^5(x) \sin^2(x) dx & 3. \int \cos^5(x) dx \\
 4. \int \cos^5(x) \sin^3(x) dx & 5. \int \sin^4(x) dx & 6. \int \cos^5(x) \sin^5(x) dx
 \end{array}$$