

Matematika A1a – Analízis, 13. hét

Határozott integrál

I. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} & 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 & 3. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{3} \\ 4. \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2 & 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx = \frac{1}{2} & 6. \int_0^1 (1-2x)^{19} \, dx = 0 \\ 7. \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx = \frac{1}{6} & 8. \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx = 1 + \log \frac{2}{1+e} & 9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \, dx = 1 \end{array}$$

II. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját.

$$\begin{array}{ll} 1. E(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8} \, dt & 2. F(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt \\ 3. G(x) = \int_0^{4x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt & 4. H(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt \end{array}$$

III. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{d}{du} \int_u^w \sin x^2 \, dx + \frac{d}{dw} \int_u^w \sin x^2 \, dx = \int_{u^2}^{w^2} \cos x \, dx.$$

IV. Határozzuk meg az

$$F: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_{-2}^x t e^{-4t} \, dt$$

függvény minimumát és maximumát.

V. Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) \, dt}{x^2} & 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, dt} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} \, dt}{x^3} \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t \, dt}{x^2} & 5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \, dt}{\frac{1}{x}} & 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, dt}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

VI. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx & 2. \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} \, dx & 3. \int_0^1 \log x \, dx \\ 4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} \, dx & 5. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) \, dx & 6. \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \, dx \end{array}$$