

Matematika A1a – Analízis, 14. hét

Határozott integrál alkalmazásai

I. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^+)$.

1. Legyen az f függvény ívhosszúsága L_f , a grafikonjának a súlypontja legyen $(x_s(L_f), y_s(L_f))$, valamint a grafikon X -tengely körüli megforgatásával nyert forgástest felszíne legyen F_f . Igazoljuk, hogy ekkor

$$F_f = 2\pi y_s L_f$$

teljesül. (*Papposz–Guldin I. tétele.*)

2. Legyen az $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$ halmaz területe T_f , a súlypontja legyen $(x_s(T_f), y_s(T_f))$, valamint a grafikon X -tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata legyen V_f . Igazoljuk, hogy ekkor

$$V_f = 2\pi y_s T_f$$

teljesül. (*Papposz–Guldin II. tétele.*)

II. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

1. Ívhosszszámítás. Mekkora az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az ívhossza?
2. Felszínszámítás. Mekkora az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az X tengely körüli megforgatásával nyert forgástest felszíne?
3. Térfogatszámítás. Mekkora az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az X tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata?
4. Görbe súlypontja. Hol van az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének a súlypontja? (A f. pontban szereplő függvényt ne vizsgáljuk!)
5. Síkbeli alakzat súlypontja. Hol van az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény és az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz által meghatározott $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$ alakzat súlypontja?
6. Forgástest súlypontja. Hol van az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az X tengely körüli megforgatásával nyert forgástest súlypontja?

Ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméter, és

- a. $f(x) = ax$, $I = [0, b]$;
- b. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $I = [0, a]$;
- c. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $I = [-a, a]$;
- d. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $I = [0, b]$;
- e. $f(x) = ax^2$, $I = [0, b]$;
- f. $f(x) = e^{ax}$, $I = [0, b]$;