Matematika A1a – Analízis, 14. hét

Határozott integrál alkalmazásai
Elmélet

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ olyan folytonos függvény, mely folytonosan differenciálható az $]a, b[$ intervallumon, valamint létezik a $\lim_{x \to a} f'(x)$ és a $\lim_{x \to b} f'(x)$ határértéke.

I. Az $A_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ 0 \le y \le f(x)\right\}$ síkbeli alakzat

területe: $T_f = \displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x$;

súlypontja: $x_s(A_f) = \dfrac{\int_I x f(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x}$, $y_s(A_f) = \dfrac{\int_I f(x)^2\,\mathrm{d}\,x}{2\int_I f(x)\,\mathrm{d}\,x}$.

II. A $\gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y = f(x)\right\}$ görbe

ívhossza: $L_f = \displaystyle\int_I \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$;

súlypontja: $x_s(L_f) = \dfrac{1}{L_f}\displaystyle\int_I x\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$, $y_s(L_f) = \dfrac{1}{L_f}\displaystyle\int_I f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$.

III. Az $\Omega_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I,\ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\right\}$ forgástest

felszíne: $F_f = 2\pi \displaystyle\int_I f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$

térfogta: $V_f = \pi \displaystyle\int_I f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$

súlypontja: $x_s(\Omega_f) = \dfrac{1}{V_f}\pi \displaystyle\int_I x f(x)^2\,\mathrm{d}\,x$, $y_s(\Omega_f) = 0$, $z_s(\Omega_f) = 0$.