Analízis 1, 2. hét

Teljes és kompakt halmazok

I$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$.

1. Mutassuk meg, hogy $\overline{B}_r(x) \subseteq \{y \in M |\ d(x,y) \leq r\}$ teljesül.
2. Adjunk példát olyan (M,d) metrikus térre, $x \in M$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ sugárra, melyre
$$B_r(x) \subsetneqq \overline{B}_r(x) \subsetneqq \{y \in M |\ d(x,y) \leq r\}.$$

II$^{\mathrm{A}}$. Legyen $d_1, d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ és $d_2(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}, d_1)$ és $(\mathbb{R}, d_2)$ nem teljes metrikus terek.

III$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) diszkrét metrikus tér. Mutassuk meg, hogy egy $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan $x \in M$, melyre a $\{n \in \mathbb{N} |\ a_n \neq x\}$ halmaz véges.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Teljes-e minden diszkrét metrikus tér?

V$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $M_1 = \left\{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$ és $M_2 = M_1 \cup \{0\}$, valamint d az euklideszi metrika ($d(x,y) = |x-y|$). Teljes-e az (M_1,d) és az (M_2,d) tér?

VI$^{\mathrm{A}}$. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tekintsük a következő függvényeket.
$$d_1 : C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$
$$d_2 : C([a,b], \mathbb{R}) \times C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \int_a^b |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}\, t$$

1. Igazoljuk, hogy $(C([a,b], \mathbb{R}), d_1)$ és $(C([a,b], \mathbb{R}), d_2)$ metrikus tér.
2. Teljes-e a $(C([a,b], \mathbb{R}), d_1)$ és a $(C([a,b], \mathbb{R}), d_2)$ tér?

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Adjunk példát olyan (M,d) metrikus térre és $A \subseteq M$ halmazra, mely korlátos, zárt, de nem kompakt.

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy metrikus térben véges sok kompakt halmaz metszete kompakt.

IX$^{\mathrm{Gy}}$. Legyenek d_1 és d_2 ekvivalens metrikák az M halmazon. Mutassuk meg, hogy egy $A \subseteq M$ halmaz pontosan akkor kompakt az (M, d_1) metrikus térben, ha kompakt az (M, d_2) térben.

X$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden metrikus tér minden kompakt részhalmaza teljes.

XI$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy minden (M,d) metrikus tér esetén az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az M halmaz kompakt.
2. Minden $(Z_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre, ha minden $i \in I$ esetén $Z_i \subseteq M$ zárt halmaz és bármely $i, j \in I$ indexhez létezik olyan $k \in I$ index, melyre $Z_k \subseteq Z_i \cap Z_j$ teljesül és $\bigcap_{i \in I} Z_i = \emptyset$, akkor van olyan $k \in I$ index, melyre $Z_k = \emptyset$.
3. Minden $(U_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre, ha minden $i \in I$ esetén $U_i \subseteq M$ nyílt halmaz és bármely $i, j \in I$ indexhez létezik olyan $k \in I$ index, melyre $U_i \cup U_j \subseteq U_k$ teljesül és $\bigcup_{i \in I} U_i = M$, akkor van olyan $k \in I$ index, melyre $U_k = M$.

XII$^{\mathrm{A}}$. Legyen (M,d) metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és $K \subseteq A$. Mutassuk meg, hogy ha a K halmaz pontosan akkor kompakt az (A, d') térben, amikor kompakt az (M,d) térben.