Analízis 1, 3. hét

(Egyenletes) folytonosság és (ívszerű) összefüggőség

I^{Gy} . Legyen (M,d) olyan metrikus tér, melyhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in M$ pontra a $\overline{B_r(x)}$ halmaz teljes. Igazoljuk, hogy ekkor az M halmaz is teljes.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) metrikus tér és $A \subseteq M$. Igazoljuk, hogy az A halmaz pontosan akkor korlátos, ha minden megszámlálható részhalmaza korlátos.

$\mathrm{III}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen (M,d) szerparábilis metrikus tér, $A \subseteq M$ és $d_A = d|_{A\times A}$. Igazoljuk, hogy az (A, d_A) tér is szerparábilis.

IV^{A} . Legyen $M_1 = M_2 = M = [0,\infty[$ és minden $x, y \in M$ pont esetén legyen $d_1(x,y) = |x-y|$ és $d_2(x,y) = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|$. Tekinstük az (M_1, d_1) és az (M_2, d_2) metrikus tereket és az $f, g : M_1 \to M_2$, $f(x) = x^4$ és $g(x) = \sqrt[4]{x}$ függvényeket.

1. Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e a g függvény?
2. Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e az f függvény?

V^{A} . Legyen $M_1 = [0,\infty[$ és minden $x, y \in M_1$ pontra az $x \neq y$ esetben legyen $d_1(x,y) = 2$, az $x = y$ esetben pedig legyen $d_1(x,y) = 0$. Legyen $M_2 = [0,1]$ és minden $x, y \in M_2$ esetén legyen $d_2(x,y) = |x-y|$. Tekintsük az $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{M_1}$ függvényt. (Vagyis $f(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és $f(x) = 0$, ha $x \notin \mathbb{Q}$.) Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e a g függvény?

$\mathrm{VI}^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1,\infty]$, $x \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $B_r(x)$ halmaz ívszerűen összefüggő az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ térben.

$\mathrm{VII}^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy az $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ térben a racionális számok halmaza nem összefüggő.

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{A}}$. Legyen A összefüggő halmaz az (M,d) metrikus térben és $B \subseteq M$ olyan halmaz, melyre $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor a B halmaz is összefüggő.

IX^{A} . Igazoljuk, hogy az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ térben az alábbi halmazok összefüggők, de nem ívszerűen összefüggők.

$$A = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \;\middle|\; x \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\} \right\} \cup (0,0) \quad B = ([0,1]\times\{0\}) \cup (0,1) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \times [0,1] \right)$$

$$C = \left\{ \frac{1}{1+t}\left(\cos(t), \sin(t)\right) \;\middle|\; t \in [1,\infty[\right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

(Segítség: Az előző feladatot érdemes használni.)

X^{H} . Tekintsük az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ térben az $T = [0,1]^2$ egységnégyzetet. Mutassuk meg, hogy a T halmaz felbontható két olyan diszjunkt, összefüggő halmazra, melyek a négyzetet átellenes csúcsait tartalmazzák. (Tehát léteznek olyan $A, B \subseteq T$ összefüggő halmazok, melyekre $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = T$, $(0,0), (1,1) \in A$ és $(0,1), (1,0) \in B$ teljesül.)
(Segítség: Az előző feladatban szereplő A halmazt érdemes figyelembe venni.)

$\mathrm{XI}^{*\mathrm{H}}$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenhol értelmezett függvény. (Itt $f \subseteq \mathbb{R}^2$ módon értelmeztük a függvényt.) Igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Az f halmaz összefüggő és $\mathbb{R}^2 \setminus f$ nem összefüggő.
3. Az f halmaz ívszerűen összefüggő.