Analízis 1, 5. hét

Skalárszorzatos terek alapjai

I$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ feletti $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzatos vektortérben az alábbiak teljesülnek.

1. Az $(x+y) \perp (x-y)$ reláció pontosan akkor teljesül, ha $\|x\| = \|y\|$.
2. Ha $\|x\| = \|y\| = 1$ és $x \perp y$, akkor $\|x-y\| = \sqrt{2}$.
3. Minden $x \in V$ esetén az $\{y \in V | x \perp y\}$ halmaz lineáris altér V-ben.

II$^{\mathrm{Gy}}$. Skaláris szorzást definiálnak-e az $\mathbb{R}$ feletti $V = C^1([0,1], \mathbb{R})$ vektortéren az alábbi kifejezések?

$$\langle f,g\rangle_1 = \int\limits_0^1 fg \qquad \langle f,g\rangle_2 = \int\limits_0^1 f'g' \qquad \langle f,g\rangle_3 = f(0)g(0) + \int\limits_0^1 f'g'$$

III$^{\mathrm{Gy}}$. Mekkora a $p(x) = x^2+1$ és a $q(x) = x^3$ polinomok által bezárt szög a polinomok V vektorterében, ha a polinomok skaláris szorzatát a $\langle P,Q\rangle = \int_0^\alpha (PQ)$ kifejezéssel definiáljuk, ahol $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ paraméter?

IV$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy a $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterekkel definiált

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_1 + 4x_2y_2 - px_1y_2 - qx_2y_1$$

leképezés pontosan akkor skaláris szorzás, ha $p = q \in \,]-2,2[$ teljesül.

V$^{\mathrm{A}}$. Jelölje $M_n(\mathbb{C})$ az $n\times n$-es komplex elemű mátrixok terét.

1. Mutassuk meg, hogy $\langle\cdot,\cdot\rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(A^*B)$ skaláris szorzás.
2. Igazoljuk, hogy minden $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ önadjungált mátrixra $|\mathrm{Tr}(AB)|^2 \le \mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{Tr}(B^2)$ teljesül.
3. Mekkora szöget zár be egymással az $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix az $M_2(\mathbb{C})$ térben?
4. Adjuk meg azt a lineáris alteret, melynek elemei merőleges az egységmátrixra.

VI$^{\mathrm{A}}$. Jelölje $M_n(\mathbb{C})$ az $n\times n$-es komplex elemű mátrixok terét és legyen $D \in M_n(C)$ pozitív definit mátrix.

1. Mutassuk meg, hogy $\langle\cdot,\cdot\rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(DA^*DB)$ skaláris szorzás.
2. Igazoljuk, hogy minden $t \in [1,\infty[$ paraméter esetén $\mathrm{Tr}\, D^t \le \sqrt{n}\cdot\sqrt{\mathrm{Tr}\, D^{2t}}$.

VII$^{\mathrm{A}}$. A $C([-1,1], \mathbb{R})$ vektorteret lássuk el a $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 fg$ skaláris szorzással és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}(x^2-1)^n$. Mutassuk meg, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ számra $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle = \dfrac{2}{2n+1}\delta_{mn}$.