

## Analízis 1, 6. hét

### Riesz-féle reprezentációs tétel és mátrixfüggvények

I<sup>Gy</sup>. Legyen  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris leképezés és az  $\mathbb{R}^n$  teret lássuk el a megszokott skaláris szorzással. Mely  $z \in \mathbb{R}^n$  vektorra fog teljesülni minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén a  $\varphi(x) = \langle z, x \rangle$  egyenlőség?

II<sup>A</sup>. Jelölje  $M_n(\mathbb{K})$  azon  $n \times n$ -es mátrixok halmazát, melynek elemei a  $\mathbb{K}$  számtestből vannak. Mutassuk meg, hogy minden  $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  lineáris leképezéshez létezik pontosan egy olyan  $D \in M_n(\mathbb{K})$  mátrix, hogy minden  $X \in M_n(\mathbb{K})$  esetén  $\varphi(X) = \text{Tr}(DX)$  teljesül.

III<sup>Gy</sup>. Számítsuk ki az  $e^{tA}$  mátrixot, ha  $t \in \mathbb{R}$  és az  $A$  mátrix a következő alakú.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV<sup>A</sup>. Tekintsük az  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$  mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix  $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ , sajátértékeit és  $(v_i)_{i=1,2,3}$  sajátvektorait.

2. Írjuk fel az  $A$  mátrixot  $S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S$  alakban.

3. Minden  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sajátvektorhoz határozzuk meg azt a  $P_i$  projekciót, mely az origón átmenő  $v_i$  irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.

4. Mutassuk meg, hogy  $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$  teljesül.

5. Igazoljuk, hogy ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 6 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ , akkor  $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & - & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

V<sup>Gy</sup>. Legyen  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  és  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.

2. Írjuk fel a mátrixokat  $S^{-1}DS$  alakban, ahol  $D$  diagonális mátrix.

3. Számoljuk ki az  $f(A)$  és az  $f(B)$  mátrixot, ahol  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ .

VI<sup>A</sup>. Tekintsük az  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  és a  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  mátrixot, valamint az  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  függvényt.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.

2. Írjuk fel a mátrixokat  $S^{-1}JS$  alakban, ahol  $J$  Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix.

3. Igazoljuk, hogy  $f(A) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  és  $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

VII<sup>Gy</sup>. Tekintsük az  $A = \frac{i}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  mátrixot.

1. Mutassuk meg, hogy az  $A$  mátrix normális, de nem önadjungált.

2. Írjuk fel a mátrix spektrálfelbontását.

3. Számoljuk az  $A^{102}$  mátrixot.