

## Analízis 1, 7. hét

### Approximálhatóság speciális függvényekkel

I<sup>A</sup> . Legyen  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Mutassuk meg, hogy ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén

- $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$  teljesül, akkor  $f = 0$ ;
- $\int_0^1 f(x)x^{\pi n} dx = 0$  teljesül, akkor  $f = 0$ ;
- $\int_0^1 f(x)e^{nx} dx = 0$  teljesül, akkor  $f = 0$ .

II<sup>Gy</sup> . Legyen  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Mutassuk meg, hogy ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$\int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = \int_0^1 f(x) \cos(nx) dx = 0,$$

akkor  $f = 0$ .

III<sup>A</sup> . Legyen  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $c < d$ .

- Mutassuk meg, hogy minden  $f \in C([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$  függvényhez és  $\varepsilon > 0$  paraméterhez létezik olyan  $n \in \mathbb{N}$ , valamint  $\alpha_i \in C([a, b], \mathbb{R})$  és  $\beta_i \in C([c, d], \mathbb{R})$   $i \in \{1, \dots, n\}$  függvényrendszer, hogy

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right\|_{\text{sup}} = \sup_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \beta_k(y) \right| < \varepsilon.$$

- Mutassuk meg, hogy minden  $f \in C([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$  függvényhez és  $\varepsilon > 0$  paraméterhez létezik olyan  $n \in \mathbb{N}$ , valamint  $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $i \in \{1, \dots, n\}$  polinomrendszer, hogy

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right\|_{\text{sup}} = \sup_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \beta_k(y) \right| < \varepsilon.$$

IV<sup>H</sup> . Legyen  $(M, d)$  és  $(M', d')$  kompakt metrikus tér. Mutassuk meg, hogy minden  $f \in C(M \times M', \mathbb{R})$  függvényhez és  $\varepsilon > 0$  paraméterhez létezik olyan  $n \in \mathbb{N}$ , valamint minden  $k = 1, \dots, n$  esetén léteznek olyan  $\alpha_i \in C(M, \mathbb{R})$  és  $\beta_i \in C(M', \mathbb{R})$  függvények, melyekre

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right\|_{\text{sup}} = \sup_{(x,y) \in T \times T'} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \beta_k(y) \right| < \varepsilon$$

teljesül.

V<sup>A</sup> . Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $W$  a  $C([a, b], \mathbb{R})$  tér konvex függvényeinek a részhalmaza, azaz  $W = \{f \in C([a, b], \mathbb{R}) \mid f \text{ konvex}\}$ , valamint legyen  $A = W - W$ .

- Mutassuk meg, hogy  $A$  lineáris altér.
- Mutassuk meg, hogy minden  $f, g \in W$  függvényre  $\text{sup}(f, g) \in W$  teljesül, ahol

$$\text{sup}(f, g) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \text{sup}(f(x), g(x)).$$

- Legyen  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in W$ . Mutassuk meg, hogy

$$\text{sup}(f_1 - g_1, f_2 - g_2) = \text{sup}(f_1 + g_2, f_2 + g_1) - (g_1 + g_2)$$

teljesül; vagyis minden  $h_1, h_2 \in A$  esetén  $\text{sup}(h_1, h_2) \in A$ .

- Mutassuk meg, hogy minden  $f \in A$  függvény esetén  $|f| \in A$  teljesül.
- Mutassuk meg, hogy  $A$  sűrű a  $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{sup}})$  térben.