Analízis 1, 8. hét

Komplex differenciálhatóság és a Cauchy–Riemann egyenletek

I^{Gy} . Számoljuk ki az $\exp(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2})$, $\sin(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2})$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\,\pi\right)$, $\ln(-4\,\mathrm{i})$ és $\mathrm{ch}(6\,\mathrm{i})$ kifejezés valós illetve képzetes részét!

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. A komplex számok körében oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$e^{\mathrm{i}\,\bar{z}}+5=0 \quad \sin(2z)+3\,\mathrm{i}=0 \quad \mathrm{ch}\,z=0 \quad \mathrm{sh}(3\,\mathrm{i}\,\bar{z})=0 \quad \sin z=\mathrm{i}\cos z$$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy $\sin'=\cos$, $\cos'=-\sin$, $\exp'=\exp$, $\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}$ és $\mathrm{ch}'=\mathrm{sh}$ teljesül.

IV^{A} . Legyen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\mathrm{sh}(3\,\mathrm{i}\,\bar{z})$. Hol differenciálható és hol reguláris az f függvény? Mibe viszi át az f függvény a $\mathrm{Re}\,z=\frac{\pi}{6}$ egyenest?

V^{A} . Határozzuk meg az

$$f:\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}\to\mathbb{C} \qquad z\mapsto\frac{z+1}{z+\mathrm{i}}$$

leképezésnél a nyújtási együtthatót, illetve a forgatási szöget a $z_0=1$ pontban!

VI^{A} . Cauchy–Riemann-egyenletek alkalmazása.

1. Hol differenciálható és hol reguláris az $f(x+\mathrm{i}\,y)=(x^3+2xy)+i(3x^2y+6y)$ függvény?
2. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy a $v(x,y)=cx^2+2xy-4y^2+3$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény valós része legyen.
3. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x,y)=cx^3+36xy^2+xy$ függvény az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény képzetes része legyen!
4. Milyen c érték mellett létezik a $v(x,y)=-x^3+cxy^2-y$ függvénynek harmonikus párja? Keressük meg, azt az $u(x,y)$ harmonikus párt, melyre $u(0,0)=0$ teljesül!

$\mathrm{VII}^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $u(x,y)=x^3+cxy^2-2xy$.

1. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az u egy reguláris f függvény valós része legyen!
2. Írjuk fel ezen f függvények közül azt, amelynél az $f(-1+\mathrm{i})$ függvényérték valós!
3. Határozzuk meg $f'(-1+\mathrm{i})$ értékét!

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{A}}$. Legyen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Mutassuk meg, hogy a $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ függvény is holomorf.