Analízis 1, 10. hét

Komplex függvény vonalmenti integrálja

I$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{C}$ számra teljesülnek az alábbiak.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x} \cos\sin x$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)!} = (\sin\cos x)(\operatorname{ch}\sin x)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x} \sin\sin x$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)!} = (\cos\cos x)(\operatorname{sh}\sin x)$

II$^{\mathrm{A}}$. Számoljuk ki az alábbi $\displaystyle\int_\gamma f$ alakú integrálokat, ha

1. $f(z) = \mathrm{e}^{2\bar{z}}$ és γ az origóból a $-1 + \mathrm{i}$ pontba menő szakasz;
2. $f(z) = \bar{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással;
4. $f(z) = z^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ és γ az origó körüli $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú kör pozitív irányítással.

III$^{\mathrm{A}}$. Számoljuk ki az adott f függvény és γ görbe mellett a $\displaystyle\int_\gamma f$ vonalmenti integrált.

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\quad\gamma$: az origó körüli 2 egység sugarú kör
2. $f(z) = \dfrac{\exp z}{z-1}$ $\quad\gamma$: az 1 körüli π egység sugarú kör
3. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{z^6}$ $\quad\gamma$: az origó körüli 2 egység sugarú kör
4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z - z - \frac{z^3}{6}}{z^5}$ $\quad\gamma$: az origó körüli 3 egység sugarú kör
5. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^3}$ $\quad\gamma$: az origó körüli 1 egység sugarú kör

(A feladatok megoldásánál használjuk fel, hogy $\gamma(t) = R\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,t)$ $(t \in [0,1],\ R \in \mathbb{R}^+)$ és $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ esetén

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad n = -1, \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq -1 \end{cases}$$

teljesül.)

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{n2\pi\,\mathrm{i}\,t}$$

görbét. Határozzuk meg a γ görbe indexfüggvényét, azaz adjuk meg az

$$\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{x-z}\,\mathrm{d}\,x$$

függvényt.