Analízis 1, 12. hét

Cauchy integrálformulái

I[A] . Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen

$$\gamma_{z_0,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + R\,\mathrm{e}^{2\pi t\,\mathrm{i}}\,.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

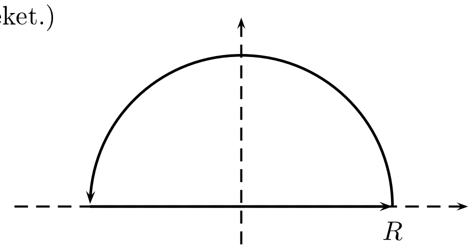
1. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-\mathrm{i},1}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z\cos\left(z^2\right)\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint_{\gamma_{2\,\mathrm{i},3}} \frac{\sin(\mathrm{i}\,z)}{(z-1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}\,z$

II[A] . Igazoljuk az $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2\pi}{1-p^2}$ egyenlőséget, ahol $p \in \,]0,1[$.

(Útmutatás: A $z = \mathrm{e}^{x\,\mathrm{i}}$ helyettesítéssel az integrált körintegrállá lehet transzformálni.)

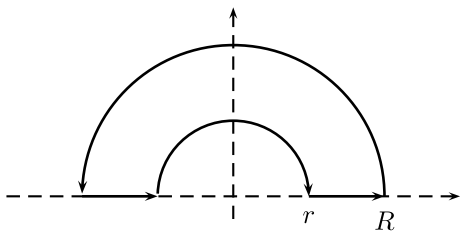
III[A] . Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ számra $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{e}^{-a}}{2a}$ teljesül.

(Útmutatás: Adott $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén írjuk fel az ábrán látható görbementi integrált, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)



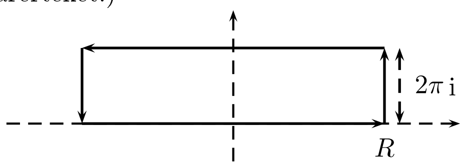
IV[A] . Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}(b-a)$ teljesül.

(Útmutatás: Legyen $r \in \,]0, \min(a,b)[$, $R \in \,]\max(a,b), \infty[$, és az $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,bz}}{z^2}$ függvényt integráljuk az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \to \infty$ és $r \to 0$ határértéket.)



V$^{\mathrm{A}}$. Legyen $p \in \,]0,1[$, bizonyítsuk be az $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ egyenlőséget.

(Útmutatás: Legyen $R \in \,]p,\infty[$ és integráljuk az $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{pz}}{1+\mathrm{e}^{z}}$ függvényt az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)



VI$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk a $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$ formulát.

(Útmutatás: Legyen $r, R \in \mathbb{R}^{+}$, $r < R$ és az $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}}{z}$ függvényt integráljuk az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \to \infty$ és $r \to 0$ határértéket.)