Analízis 1, 13. hét

Cauchy integrálformulái, reziduum számítás és Laurent-sorfejtés

I$^{\text{A}}$. Igazolja az alábbi $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvények 0 pontbeli reziduumára vonatkozó összefüggéseket.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z + z^2}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = 1$.
2. $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{2}$.
3. $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^4}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{1}{6}$.
4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4(1 - z^2)}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{7}{6}$.
5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^4}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{45}$.
6. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\ln(1 + z)}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = 1$.
7. $f(z) = \operatorname{cth} z$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = 1$.
8. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^4 + z^5}$, $\quad \operatorname{Res}_f(0) = -1$.

II$^{\text{A}}$. Határozzuk meg az $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden lehetséges tartományon.

1. $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \dfrac{1}{z+1} \quad z_0 = \mathrm{i}$
2. $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, \mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(z-\mathrm{i})} \quad z_0 = \mathrm{i}$
3. $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \mathrm{e}^z + \dfrac{1}{z} \quad z_0 = 2$

III$^{\text{A}}$. A Cauchy-féle integrálformula alapján igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{a} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2a^3} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} \,\mathrm{d}\, x = \frac{3\pi}{8a^5}$$

teljesül.

(Útmutatás: Az $f(z) = \dfrac{1}{(z + \mathrm{i}\, a)^k}$ $(k = 1, 2, 3)$ függvény esetén számoljuk ki a Cauchy-formulával az $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - \mathrm{i}\, a)^k} \,\mathrm{d}\, z$ integrál értékét, ahol γ a $[-R, R] \subseteq \mathbb{R}$ szakaszból (ahol $a < R$) és az R pontot a $-R$ pontottal összekötő origó középpontú pozitív félsíkban haladó félkörív. Majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)

IV$^{\text{A}}$. Tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^3}$ függvényt.

1. Írjuk fel a függvény $z_0 = -1$ pont körüli Laurent-sorát.
2. Vizsgáljuk meg a szingularitás jellegét és adjuk meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban.
3. Számoljuk ki a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-2,2}} f$ és a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-5,1}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.