Analízis 1.
1. pózárthelyi dolgozat
2022. 12. 12. 8.15-9.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^+ =]0,\infty[$ halmazon a $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ metrikát. *(5+5 p.)*

a.) Adja meg a $B_1\left(\frac{1}{2}\right)$ és a $B_2(1)$ halmaz elemeit.

b.) Az $a : \mathbb{N} \to M$, $a_n = n$ sorozat konvergens-e, illetve Cauchy-sorozat-e?

2. Legyen (M,d) metrikus tér és $K \subseteq M$ tetszőleges részhalmaz. Igazolja, hogy az alábbi állítások ekvivalensek. *(6+6 p.)*

i. A K halmaz kompakt.

ii. Minden $(Z_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre, ha minden $i \in I$ esetén $Z_i \subseteq M$ zárt halmaz és bármely $i,j \in I$ indexhez létezik olyan $k \in I$ index, melyre $Z_k \subseteq Z_i \cap Z_j$ teljesül és $\bigcap\limits_{i\in I} Z_i = \emptyset$, akkor van olyan $k \in I$ index, melyre $Z_k = \emptyset$.

3. Definiáljuk a sorozatok vektorterének a $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ |\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\}| < \infty\}$ alterét és tekintsük a *(5+5 p.)*

$$\varphi : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

lineáris leképezést. Folytonos-e φ, ha a $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ teret a

a.) $\|\cdot\|_1$ normával látjuk el;

b.) $\|\cdot\|_\infty$ normával látjuk el;

4. Legyen $M_1 = M_2 = M = [0,\infty[$ és minden $x,y \in M$ pont esetén legyen $d_1(x,y) = |x-y|$ és $d_2(x,y) = |x^2 - y^2|$. Tekinstük az (M_1,d_1) és az (M_2,d_2) metrikus tereket és az $f,g : M_1 \to M_2$, $f(x) = x$ és $g(x) = \sqrt{x}$ függvényeket. *(6+6 p.)*

a.) Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e az f függvény?

b.) Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e a g függvény?

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, valamint $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Számolja ki az $f(A)$ mátrixot. *(12 p.)*