

**Analízis 1.**  
**1. zárthelyi dolgozat**  
2022. 10. 26. 12.15-13.45

Név:  
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ:

1. Tekintsük a valós számok halmazán a  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |3^x - 3^y|$  (5+5 p.) metrikát.

- a.) Adja meg a  $B_1(0)$  és a  $B_2(3)$  halmaz elemeit.
- b.) Az  $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ ,  $a_n = -n$  sorozat konvergencia-e, illetve Cauchy-sorozat-e?

2. Legyen  $(M, d)$  metrikus tér és  $K \subseteq M$  tetszőleges részhalmaz. Igazolja, hogy az (6+6 p.) alábbi állítások ekvivalensek.

- i. A  $K$  halmaz kompakt.
- ii. Minden  $(U_i)_{i \in I}$  halmazrendszerre, ha minden  $i \in I$  esetén  $U_i \subseteq M$  nyílt halmaz és bármely  $i, j \in I$  indexhez létezik olyan  $k \in I$  index, melyre  $U_i \cup U_j \subseteq U_k$  teljesül és  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ , akkor van olyan  $k \in I$  index, melyre  $K \subseteq U_k$ .

3. Jelölje  $M_n(\mathbb{C})$  az  $n \times n$ -es komplex elemű mátrixok terét. (5+5 p.)

- a.) Mutassa meg, hogy  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^*B)$  skaláris szorzás.
- b.) Igazolja, hogy minden  $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  lineáris leképezéshez tartozik egy olyan  $X_\varphi$  mátrix, melyre minden  $A \in M_n(\mathbb{C})$  esetén

$$\varphi(A) = \text{Tr}(X_\varphi A)$$

teljesül.

4. Legyen  $M_1 = M_2 = M = [0, \infty[$  és minden  $x, y \in M$  pont esetén legyen (6+6 p.)  $d_1(x, y) = |x - y|$  és  $d_2(x, y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ . Tekintsük az  $(M_1, d_1)$  és az  $(M_2, d_2)$  metrikus tereket és az  $f, g : M_1 \rightarrow M_2$ ,  $f(x) = x^2$  és  $g(x) = \sqrt{x}$  függvényeket.

- a.) Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e az  $f$  függvény?
- b.) Folytonos-e és egyenletesen folytonos-e a  $g$  függvény?

5. Legyen  $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ . Számolja ki a  $\cos\left(\frac{\pi D}{4}\right)$  mátrixot. (12 p.)