

**Analízis 1.**  
**2. pótzárthelyi dolgozat**  
 2022. 12. 12. 10.15-11.45

Név:  
 Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ:

1. Legyen  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = cx^2y - y^3 - 4xy$ . (3×3 p.)

- a.) Határozza meg a  $c$  paraméter értékét úgy, hogy az  $u$  egy mindenhol értelmezett holomorf  $f$  függvény képzetes része legyen!
- b.) Írja fel ezen  $f$  függvények közül azt, amelynél az  $f(1 - i)$  függvényérték valós!
- c.) Határozza meg  $f'(1 - i)$  értékét!

2. Legyen  $\gamma$  görbe az origó körüli 1 sugarú körívnek az a negyede, mely a  $i$  pontból (6 p.)  
 indul és a  $-1$  pontban végződik, valamint legyen  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{\bar{z}} + z^2$ .

Határozza meg az  $\int_{\gamma} f$  integrál értékét!

3. Adott  $a \in \mathbb{C}$  és  $r \in \mathbb{R}^+$  paraméter esetén  $\Gamma(a, r)$  jelölje az  $a$  középpontú  $r$  sugarú (5+6 p.)  
 zárt körívet pozitív irányítással. (Tehát  $\text{Ind}_{\Gamma(a,r)}(a) = 1$ .) Számolja ki az alábbi integrálokat.

- a.)  $\int_{\Gamma(i,2)} \frac{\text{ch}(z)}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz$
- b.)  $\int_{\Gamma(i,1)} \frac{\cos(z)}{(z^2 + 1)^2} dz$

4. Legyen  $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2i\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ . Határozza meg az  $f$  függvény (6+6 p.)  
 origó körüli Laurent-sorfejtését a

- a.)  $2 < |z| < 3$  tartományon;
- b.)  $3 < |z|$  tartományon.

5. Tekintsük az  $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{e^z}{(z - i)^2}$  függvényt. (6+3+3 p.)

1. Írja fel a függvény  $z_0 = i$  pont körüli Laurent-sorát.
2. Vizsgálja meg a szingularitás jellegét és adjuk meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban.
3. Számolja ki a  $\oint_{\Gamma(1,3)} f$  és a  $\oint_{\Gamma(-4,2)} f$  integrál értékét, ahol  $\Gamma(a, r)$  jelöli az  $a \in \mathbb{C}$  középpontú  $r \in \mathbb{R}^+$  sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.