

Analízis 1.
2. zárthelyi dolgozat
2022. 12. 07. 12.15-13.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ:

1. Legyen $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) = x^4 + y^4 + cx^2y^2$. (3×3 p.)

- a.) Határozza meg a c paraméter értékét úgy, hogy az u egy mindenhol értelmezett holomorf f függvény valós része legyen!
- b.) Írja fel ezen f függvények közül azt, amelynél az $f(1+i)$ függvényérték valós!
- c.) Határozza meg $f'(1+i)$ értékét!

2. Legyen γ görbe az origó körüli 2 sugarú körívnek az a negyede, mely a 2 pontból (6 p.)
indul és a $2i$ pontban végződik, valamint legyen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z} + \bar{z}$.

Határozza meg az $\int_{\gamma} f$ integrál értékét!

3. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén $\Gamma(a, r)$ jelölje az a középpontú r sugarú (5+6 p.)
zárt körívet pozitív irányítással. (Tehát $\text{Ind}_{\Gamma(a,r)}(a) = 1$.) Számolja ki az alábbi integrálokat.

- a.) $\int_{\Gamma(i,3)} \frac{\sin(z)}{z^2 + 1} dz$
- b.) $\int_{\Gamma(2,2)} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+1)} dz$

4. Legyen $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)}$. Határozza meg az f (6+6 p.)
függvény origó körüli Laurent-sorfejtését a

- a.) $1 < |z| < 2$ tartományon;
- b.) $2 < |z|$ tartományon.

5. Legyen $g : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ és $R \in]1, \infty[$ paraméter. (6+6 p.)

- a.) Legyen γ_1 a $[-R, R]$ szakasz görbéje. Igazolja, hogy $\int_{\gamma_1} g = \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$
teljesül.
- b.) Legyen γ_R az R pontból induló $-R$ pontba érkező felső félsíkban haladó félkör.
Tegyük fel, hogy $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g = 0$. Határozza meg az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$ integrál
értékét.