Vizsgakövetelmény

Normált algebrák elemei

Alapfogalmak

1. Algebra, egységelemes algebra, standard egységelemesítés.
2. Ideál, reguláris ideál.
3. Spektrum.
4. Karakter, Gelfand-transzformáció, Gelfand-topológia a karaktertéren.
5. Normált algebra, Banach-algebra.
6. Spektrálsugár.
7. Az involúció.
8. $*$-algebra, normált $*$-algebra, Banach $*$-algebra, pre-C^*-algebra, C^*-algebra.
9. Projektorok, valamint normális, önadjungált és pozitív elemek $*$-algebrában.
10. A $\leq$ reláció az önadjungált elemek halmazán a $*$-algebrában.
11. Unitér elemek egységelemes $*$-algebrában.
12. Approximatív egységelemes normált algebrák.
13. $*$-algebrán értelmezett funkcionál; pozitív, önadjungált, reguláris funkcionál.
14. C^*-algebra standard egységelemesítése.
15. $*$-algebra ábrázolása; nemelfajult, ciklikus, algebrailag, illetve geometriailag irreducibilis ábrázolása.
16. GNS konstrukció.

Alaptételek

1. Algebra egységelemesítésének unvierzalitása.
2. Jacobson-lemma.
3. Gelfand–Mazur-tétel.
4. A spektrum tulajdonságai egységelemes Banach-algebrában.
5. Lokálisan kompakt téren értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos végtelenben eltűnő függvények C^*-algebrájának szerkezete. (Zárt ideáljai, reguláris ideáljai, és karakteretere.)
6. A C^*-norma egyértelműsége.
7. Gelfand–Najmark-tétel.
8. A folytonos függvényszámítás tétele.
9. Pozitív elemek jellemzése egységelemes C^*-algebrában.

Az alaptételek

Forrás: **Kristóf János:A matematikai analízis elemei IV.**

1. Algebra egységelemesítésének unvierzalitása.

Legyen A algebra a K test felett.

- Létezik olyan B egységelemes algebra K felett, és olyan $j : A \to B$ algebra-morfizmus, amelyre teljesül az, hogy minden C egységelemes algebrához, és minden $\pi : A \to C$ algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$.
- Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan párok, hogy B_1 és B_2 egységelemes algebrák a K test felett, $j_1 : A \to B_1$ és $j_2 : A \to B_2$ algebra-morfizmusok, és minden C egységelemes algebrához, valamint minden $\pi_1 : A \to C$ és $\pi_2 : A \to C$ algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi}_1 : B_1 \to C$ és $\tilde{\pi}_2 : B_2 \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmusok, hogy $\tilde{\pi}_1 \circ j_1 = \pi_1$ és $\tilde{\pi}_2 \circ j_2 = \pi_2$. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_2$ algebra-morfizmus, amelyre $\pi \circ j_1 = j_2$, és ez a leképezés algebra-izomorfizmus.

2. Jacobson-lemma.

Ha A egységelemes algebra, akkor $a, b \in A$ esetén $\{0\} \cup \mathrm{Sp}_A(ab) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}_A(ba)$.

3. Gelfand–Mazur-tétel.

Ha A olyan egységelemes komplex normált algebra, amelyben minden nem nulla elem invertálható, akkor $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

4. A spektrum tulajdonságai egységelemes Banach-algebrában.

Legyen A egységelemes Banach-algebra $\mathbb{K}$-felett és $a \in A$.

- Az $\mathrm{Sp}_A(a)$ halmaz kompakt $\mathbb{K}$-ban és $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0; \mathbb{K})$. Továbbá, az a elem rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő és $\mathbb{K}$-analitikus.
- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}^+ | \ \mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{C})\}$ (ez a spektrálsugár *minimalitási tulajdonsága*), és ha $A \neq \{0\}$, akkor $\mathrm{Sp}_A(a) \neq \emptyset$.

5. Lokálisan kompakt téren értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos végtelenben eltűnő függvények C^*-algebrájának szerkezete.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $A = \overline{C_0}(T; \mathbb{K})$. Minden $F \subseteq T$ esetén legyen

$$\mathfrak{m}_F = \{a \in A \mid F \subseteq [a = 0]\}.$$

- Az $F \mapsto \mathfrak{m}_F$ hozzárendelés *bijekció* a T zárt részhalmazainak halmaza és az A zárt ideáljainak halmaza között.
- Ha $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor az $\mathfrak{m}_F$ ideál pontosan akkor reguláris, ha F kompakt és nem üres.
- Minden $t \in T$ esetén értelmezzük az $\varepsilon_t : A \to \mathbb{K};\ a \mapsto a(t)$ függvényt. Ekkor $t \in T$ esetén ε_t nem nulla karaktere A-nak, és az $\varepsilon : T \to X(A)$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_t$ függvény *homemorfizmus* a T lokálisan kompakt tér és az $X(A)$ karaktertér között.
- A $\varepsilon^{\#} : \overline{C_0}(X(A); \mathbb{K}) \to \overline{C_0}(T; \mathbb{K})$, $\varepsilon^{\#}(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon$ leképezés izometrikus *algebra-izomorfizmus*, és $\mathcal{G}_A = (\varepsilon^{\#})^{-1}$ teljesül.

6. A C^*-norma egyértelműsége.
Ha A *-algebra, akkor legfeljebb egy olyan norma létezik A felett, amellyel A C^*-algebra.

7. Gelfand–Najmark-tétel.

- (*Első Gelfand-Najmark-tétel.*) Ha A kommutatív C^*-algebra, akkor a

$$\mathcal{G}_A : A \to \overline{C_0}(X(A); \mathbb{C})$$

Gelfand-reprezentáció *-izomorfizmus.
- (*Második Gelfand-Najmark tétel.*) Minden C^*-algebrának létezik hű ábrázolása.

8. A folytonos függvényszámítás tétele.
Legyen A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Ekkor létezik egyetlen olyan

$$C_a : C(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C}) \to A$$

egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, amelyre $C_a(\mathrm{id}_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = a$. A C_a leképezés izometria és $\mathrm{Ran}(C_a)$ megegyezik az $\{a, 1\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrával.

9. Pozitív elemek jellemzése egységelemes C^*-algebrában.
Legyen A egységelemes C^*-algebra és $x \in A$ önadjungált elem. A következő állítások ekvivalensek.

- $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, vagyis az x elem *pozitív spektrumú.*
- Létezik olyan $y \in A$ önadjungált elem, amelyre $x = y^2$.
- Létezik olyan $a \in A$, amelyre $x = a^*a$.
- $x \in A_+$, vagyis az x elem *pozitív.*

Továbbá, az A_+ halmaz zárt a C^*-norma szerint, és $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ teljesül.