Kalkulus 2, 1. hét

Belső, torlódási és határpont, nyílt és zárt halmazok

I$^{\mathrm{A}}$. Vázlatosan ábrázoljuk az $\mathbb{R}^2$ alábbi részhalmazait, adjuk meg a belső, a torlódási, a határ és az izolált pontjaikat, valamint a lezártjukat és a belsejüket.

a.) $\left\{\left(\frac{-1}{n},\frac{-1}{n}\right)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; n\in\mathbb{N}^+\right\}\cup\,]3,4]\times\{0\}$

b.) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x,\ 0<y<x^2\}$

c.) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{x}\}\cup[-1,0[\,\times\{0\}$

d.) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1,\ y=\sin\frac{1}{x}\right\}$

e.) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x,\ y<\sin\frac{1}{x}\right\}$

II$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ normált térben, minden $a\in\mathbb{K}^n$ és $r\in\mathbb{R}^+$ esetén

$$\overline{B_r(a)}=\{x\in\mathbb{K}^n \mid \|x-a\|\le r\}\,.$$

III$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|)$ normált térben, minden $a\in\mathbb{K}^n$ és $r\in\mathbb{R}^+$ esetén $B_r(a)$ és $\overline{B_r(a)}$ konvex halmaz.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Az alábbi példákban mindenhol az $\mathbb{R}^n$ teret a $\|\cdot\|_2$ normával látjuk el.

1. Nyílt-e az $]1,2[$ halmaz $\mathbb{R}$-ben?
2. Nyílt-e az $]1,2[\,\times\{0\}$ halmaz $\mathbb{R}^2$-ben?
3. Zárt-e az $[1,\infty[$ halmaz $\mathbb{R}$-ben?
4. Zárt-e az $[1,\infty[\,\times\{0\}$ halmaz $\mathbb{R}^2$-ben?

V$^{\mathrm{A}}$. Legyen $p\in[1,\infty[$, $a\in\mathbb{R}^n$.

1. Mutassuk meg, hogy minden $R\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|_p}(a)\subseteq B_R^{\|\cdot\|_\infty}(a)$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $R\in\mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|_\infty}(a)\subseteq B_R^{\|\cdot\|_p}(a)$.
3. Mutassuk meg, hogy az $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$ és az $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ terekben ugyanazok a nyílt, a zárt és a korlátos halmazok.

VI$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy a $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ normált térben $\overline{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}=\mathbb{R}^2$.

VII$^{\mathrm{A}}$. Tekintsük az $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|)$ normált teret.

1. Mutassuk meg, hogy minden $A,B\in\mathbb{K}^n$ esetén $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ és $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.
2. Adjunk példát olyan $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|)$ normált térre és $A,B\in\mathbb{K}^n$ halmazra, melyre $\overline{A\cap B}\ne\overline{A}\cap\overline{B}$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $A,B\in\mathbb{K}^n$ esetén $\operatorname{Int}(A\cap B)=\operatorname{Int}A\cap\operatorname{Int}B.$ és $\operatorname{Int}(A\cup B)\supseteq\operatorname{Int}A\cup\operatorname{Int}B$.
4. Adjunk példát olyan $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|)$ normált térre és $A,B\in\mathbb{K}^n$ halmazra, melyre $\operatorname{Int}(A\cup B)\ne\operatorname{Int}A\cup\operatorname{Int}B$.

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|)$ normált tér és legyen $(E_i)_{i\in I}$ a $\mathbb{K}^n$ részhalmazainak tetszőleges rendszere. Bizonyítsuk be a következőket.

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{i\in I}E_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in I}\operatorname{Int}E_i \qquad \operatorname{Int}\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)\supseteq\bigcup_{i\in I}\operatorname{Int}E_i \qquad \overline{\bigcap_{i\in I}E_i}\subseteq\bigcap_{i\in I}\overline{E_i} \qquad \overline{\bigcup_{i\in I}E_i}\supseteq\bigcup_{i\in I}\overline{E_i}$$