Kalkulus 2, 2. hét

Határérték

I^{A}. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határtértékét, ha létezik.

1. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$, $a_n = \left(\sqrt{n^2+1}, \dfrac{2n+3}{4n-1}\right)$
2. $b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^3$, $b_n = \left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n, \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$
3. $c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^2$, $c_n = \left(\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-2\,\mathrm{i}}\right)^n, \dfrac{n^2}{2^n} - \dfrac{n^3}{3^n}\,\mathrm{i}\right)$

II^{A}. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határtértékek, és ha léteznek, számoljuk ki azokat!

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x-y}{xy+x+y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y)}{x^2+y^2}$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$

Folytonosság

I^{Gy}. Folytonosak-e az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{ha} \quad xy \neq 0, \\ 0 & \text{ha} \quad xy = 0; \end{cases}$$

II^{A}. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre, melyre

1. minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x_0, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x_0, y)$ függvény folytonos;
2. minden $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén az $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y_0)$ függvény folytonos;

azonban f nem folytonos!

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Adjunk példát olyan $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumra és $f : I \to \mathbb{R}^2$ folytonos injektív függvényre, melynek az inverze nem folytonos.

$\mathrm{IV}^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, ha $(x,y) \neq (0,0)$ és $f(0,0) = 0$ függvényt.

1. Folytonos-e az f függvény az origón átmenő egyenesek mentén?
2. Folytonos-e f a $(0,0)$ pontban?

V^{H}. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre az alábbiak teljesülnek.

1. Minden $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x_0, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x_0, y)$ függvény folytonos.
2. Minden $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén az $f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y_0)$ függvény folytonos.
3. Minden $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmazra $f(K)$ kompakt halmaz.

Mutassuk meg, hogy ekkor f folytonos.