

## Kalkulus 2, 4. hét

### Banach-féle fixponttétel, folytonosság topologikus jellemzése és halmazok távolsága

I<sup>Gy</sup>. Legyen  $M = [\sqrt{3}, \infty[$  és tekintsük a  $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{3}{x} \right)$  leképezést.

1. Mutassuk meg, hogy  $\text{Ran } T \subseteq M$ .
2. Mutassuk meg, hogy  $T$  kontrakció.
3. Legyen  $x_0 \in M$  és tekintsük az  $x_{n+1} = T(x_n)$  rekurzióval meghatározott sorozatot. Mi lesz az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat hatáértéke?

II<sup>A</sup>. Legyen  $M = [1, \infty[$  és  $f : M \rightarrow M$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ .

1. Mutassuk meg, hogy minden  $x_1, x_2 \in M$  esetén létezik olyan  $0 < K < 1$ , hogy

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K |x_1 - x_2|.$$

2. Igazoljuk, hogy az  $M$  halmaz teljes.
3. Nem mond-e ellent a Banach-féle fixpont tételnek, hogy nem létezik olyan  $x \in M$ , melyre  $f(x) = x$  teljesül?

III<sup>A</sup>. Legyen  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $a < b$ . Igazoljuk, hogy ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, mely folytonos és differenciálható az  $]a, b[$  halmazon, valamint létezik olyan  $K \in [0, 1[$ , hogy minden  $x \in ]a, b[$  esetén  $|f'(x)| \leq K$ , akkor  $f$  kontrakció.

IV<sup>Gy</sup>. Kontrakció-e az  $f : [1, \infty[ \rightarrow [1, \infty[$ ,  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$  függvény?

V<sup>A</sup>. A folytonosság topologikus jellemzésének segítségével igazoljuk, hogy az

1.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2 < y, 0 < x, y < x\}$  halmaz nyílt;
2.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq x, 0 \leq y, z \leq 2 - x^2 - y^2\}$  halmaz zárt.

VI<sup>A</sup>. Ajunk példát az  $\mathbb{R}^2$  síkon olyan diszjunkt halmazokra

1. melyek zártak és pontosan 3 pontpár létezik, melyek távolsága megegyezik a halmazok távolságával és a pontpár egyik tagja az egyik, a másik tagja a másik halmazban van;
2. melyek zártak és végtelen sok pontpár létezik, melyek távolsága megegyezik a halmazok távolságával és a pontpár egyik tagja az egyik, a másik tagja a másik halmazban van;
3. melyek konvexek, zártak és távolságuk 0.

### Operátornorma

I. Tekintsük az  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  mátrixot, mint  $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_j)$  normált terek közötti lineáris leképezést, ahol  $i, j \in \{1, 2, \infty\}$ . Jelölje az  $A$  operátornormáját  $\|A\|_{ij}$  ezekben az esetekben.

1<sup>A</sup> Határozzuk meg az  $i = j$  esetekben az  $A$  leképezés normáját.

2<sup>Gy</sup> Mutassuk meg, hogy az  $\|A\|_{12} = \sqrt{40}$  és  $\|A\|_{1\infty} = 6$ .

3<sup>Gy</sup> Mutassuk meg, hogy az  $\|A\|_{\infty 1} = 13$  és  $\|A\|_{\infty 2} = \sqrt{89}$ .

4<sup>H</sup> Mutassuk meg, hogy az  $\|A\|_{21} = \sqrt{89}$  és  $\|A\|_{2\infty} = 2\sqrt{10}$ .