Kalkulus 2, 5. hét

Függvénysorozatok és függvénysorok konvergenciája

I^{Gy}. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n(x) = x^n$.

1. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1]$ intervallumon pontonként konvergens, nem egyenletesen konvergens és nem lokálisan egyenletesen konvergens.
2. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,1[$ intervallumon pontonként konvergens, nem egyenletesen konvergens és lokálisan egyenletesen konvergens.
3. Legyen $a \in \,]0,1[$. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $[0,a]$ intervallumon pontonként konvergens, egyenletesen konvergens és lokálisan egyenletesen konvergens.

II^{A}. Határozzuk meg az alábbi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+ : f_n : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R})$ függvénysorozat konvergenciatartományát és az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét.

1. $f_n(x) = \log^n x$
2. $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$
4. $f_n(x) = \dfrac{2nx^4}{n^2x^4+n+3}$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos nx}{n^4+x^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+x^{2n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^x}$

$\mathrm{IV}^{\mathrm{Gy}}$. Határozzuk meg az alábbi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+ : f_n : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R})$ függvénysorozat $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét, valamint döntsük el, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál-e az f határfüggvényhez a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$
2. $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$
3. $f_n(x) = \dfrac{2x^{2n}}{1+x^{4n}}$
4. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{nx}-1}{\mathrm{e}^{nx}+1}$
5. $f_n(x) = n\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$
6. $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2}$
7. $f_n(x) = \sin^n x$
8. $f_n(x) = n\sin\dfrac{x}{n}$
9. $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx$
10. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
11. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$
12. $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$

V^{Gy}. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek-e az adott intervallumon, ahol $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter.

1. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $\quad I_1 = [0,\infty[\quad I_2 = [a,\infty[$
2. $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ $\quad I_1 = [0,\infty[\quad I_2 = [0,a]$