Kalkulus 2, 6. hét

Függvénysorok egyenletes konvergenciája

I$^{\text{Gy}}$. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-nx}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}+n\pi\right)$

Hatványsorok

I$^{\text{A}}$. Mely valós x paraméterek esetén konvergensek az alábbi sorok?

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}x^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1}x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}(x+7)^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$

II$^{\text{Gy}}$. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n$$

Függvénysorozatok, függvénysorok és hatványsorok integrálása és deriválása

I$^{\text{Gy}}$. Igazoljuk, hogy

1. a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n}x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-8,9]$ halmazon;
2. a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n}x^{2n}$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-3,3]$ halmazon.

II$^{\text{Gy}}$. Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4+x^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,\mathrm{e}^{-kx^2}\right) = -2x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{-kx^2}$$

III$^{\text{Gy}}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{2^{k-1}}$ és $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{k}\right)}{k+1}$. Legyen $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ és $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\operatorname{arctg} n^5x^2}{x+\sqrt{n}}\,\mathrm{d}\,x$ és a $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{1}\frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}\,x$ határértéket.

V$^{\mathrm{A}}$. Tekintsük a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsort.

1. Mutassuk meg, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ halmazon.
2. Igazoljuk, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$. (Segítség: $\frac{\pi}{4}=\arctan 1$.)