Kalkulus 2, 7. hét

Taylor-sorfejtés

I$^{\mathrm{A}}$. A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az arctg, arcsin, arsh és a $\sqrt[3]{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

II$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg $k = 100$ illetve $k = 101$ esetén $\operatorname{arsh}^{(k)}(0)$ és $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ értékét.

III$^{\mathrm{A}}$. Állítsuk elő hatványsor alakban a $]-1, 1[$ intervallumon az arctg, arcsin, arsh és az $\log\left(1 + \mathrm{id}_{]-1,\infty[}\right)$ függvényt.

IV$^{\mathrm{A}}$. A Taylor-sorfejtés segítségével igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{k}\right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}-\sin\frac{x}{k}\right)$$

V$^{\mathrm{Gy}}$. Határozzuk meg numerukisan az $\mathrm{e}^{0,2}$, $\sqrt[4]{17}$ és $\cos(0,5)$ kifejezés értékét három tizedesjegy pontossággal.

VI$^{\mathrm{Gy}}$. Az integrandust az ötödfokú Taylor-polinomjával közelítve adjunk becslést az

$$\int_0^{0,5}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int_0^{0,2}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

integrálokra, valamint becsüljük meg a hibát!

Lokális szélsőérték és a deriváltfüggvény

I$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} x^4\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x\neq 0;\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható, a 0 pontban lokális minimuma van, azonban f' nem vált előjelet a 0 pontban (vagyis a 0 bármely környezetében f' felvesz pozitív és negatív értékeket is).

II$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\neq 0;\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható, $f'(0) = 1$, azonban f nem monoton a 0 pont egyetlen környezetében sem.