Kalkulus 2, 7. hét

Haladóbb feladatok a függvénysorozatok és függvénysorok témaköréből

I^{H}. Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény.

$$f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad f_n(x) = \sqrt{n(x^2-1)}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

II^{H}. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ 2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{n} (1 - \sqrt[k]{x})$ 3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x}$

$\mathrm{III}^{\mathrm{H}}$. Igazoljuk, hogy minden $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számra $\displaystyle\int_0^1 x^n \log^k x \;\mathrm{d}\,x = (-1)^k \frac{k!}{(1+n)^{1+k}}$ teljesül, vagyis speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\int_0^1 (-x\log x)^n \;\mathrm{d}\,x = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. Majd ezek alapján igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} \;\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

teljesül.

IV^{H}. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergáljon[1] az A halmazon az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényhez. Mutassuk meg, hogy ekkor $f \in C(A, \mathbb{R})$.

V^{H}. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy a $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényre $f \in C(A, \mathbb{R})$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat kváziegyenletesen konvergens az A halmazon.

VI^{H}. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{ha} \quad x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]; \\ 2n - n^2 x & \text{ha} \quad x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \\ 0 & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left]0, \frac{2}{n}\right]. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvényét, valamint bizonyítsuk be, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens, de kváziegyeneltesen konvergens.

[1] Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *kváziegyenletesen konvergens az A halmazon*, ha létezik az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvény az A halmazon, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $N \in \mathbb{N}$ esetén létezik véges sok $N < n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $x \in A$ elemre valamely $n_i \in \{n_1, \ldots, n_k\}$ számra $|f(x) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon$ teljesül.

VII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$ olyan, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az I halmazon. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

VIII$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan monoton függvény, melyre a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(a)|$ és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(b)|$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor abszolút- és egyenletesen konvergens.

IX$^{\mathrm{Gy}}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\mathbb{Q}$ halmazon, akkor egyenletesen konvergens az egész $\mathbb{R}$ halmazon is.

X$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x+k}{n+1}\right).$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényt és mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontokénti határfüggvényhez.

XI$^{\mathrm{H}}$. (*Dini-tétel.*) Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $C(M, \mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkent konvergens az M halmazon, és a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.

XII$^{*\mathrm{H}}$. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{a_n}{n^x}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0, \infty[$ halmazon.

XIII$^{*\mathrm{H}}$. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$ halmazban haladó monoton függvények sorozata. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatból kiválasztható pontonként konvergens részsorozat.

XIV$^{**\mathrm{H}}$. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a I halmazon, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a I halmazon.