Kalkulus 2, 8. hét

Parciális deriváltak

I[A]. Mutassuk meg, hogy az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

függvény nem folytonos a nullában, de itt léteznek a parciális deriváltjai.

II[Gy]. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait.

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\qquad (x,y,z)\mapsto\frac{x^2+\cos y}{1+\mathrm{e}^z}+y^2z$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(x+1)y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

III[Gy]. Határozzuk meg, az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény $v\in\mathbb{R}^2$ iránymenti deriváltját az $a\in\mathbb{R}^2$ pontban az iránymenti derivált definíciója alapján, valamint az f függvény a pontbeli deriváltjának a segítségével. (Használjuk fel azt a tényt, hogy az alábbi függvények differenciálhatók.)

1. $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, $v=(1,3)$, $a=(1,1)$.
2. $f(x,y)=\dfrac{y^3}{\mathrm{e}^{2x+1}}$, $v=(-1,1)$, $a=(-1,1)$.

IV[A]. Tekintsük az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\begin{pmatrix}x^2+3xy+y^3\\ 1+xy^2+x^2\end{pmatrix}$ differenciálható függvényt és legyen $a=(2,1)\in\mathbb{R}^2$, valamint $u=(3,-1)\in\mathbb{R}^2$. Számoljuk ki a $\big((\mathrm{D}f)(a)\big)(u)$ mennyiségeket.

V[A]. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $f(t)=\left(t^2-t,\dfrac{1}{1+t^2},\mathrm{e}^t\right)$ és $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=x^2y-z$. Használjuk fel, hogy f és g differenciálható.

1. Határozzuk meg a $g\circ f$ függvény deriváltját a $t_0=1$ pontban a közvetett függvény deriválási szabálya alapján.
2. Határozzuk meg a $f\circ g$ függvény deriváltját a $a_0=(2,3,11)$ pontban a közvetett függvény deriválási szabálya alapján.

VI[Gy]. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $$x\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}(xy)=y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(xy)$$
2. $$\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i\partial y^k}(xy\,\mathrm{e}^{x+y})=(i+x)(k+y)\,\mathrm{e}^{x+y},\quad i,k\in\mathbb{N}$$
3. $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)((\sin x)(\sin y))=0$$
4. $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\right)=0,\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$