Kalkulus 2, 9. hét

Függvények differenciálhatósága

I[A]. Legyen $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ és tekintsük az alábbi $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots 6)$ függvényeket.

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq a, \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = a. \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ha} \quad (x,y) \neq a, \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = a. \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} x^3y^4 \sin\dfrac{1}{y}, & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases} \qquad f_6(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$$

1. Igazoljuk, hogy az f_1 függvénynek minden pontban létezik parciális deriváltja, azonban a parciális deriváltak nem folytonosak az a pontban, valamint f_1 nem differenciálható az a pontban.
2. Igazoljuk, hogy az f_2 függvény folytonosan differenciálható az a pontban.
3. Igazoljuk, hogy az f_3 függvénynek nem létezik a parciális deriváltja az a pontban.
4. Igazoljuk, hogy az f_4 függvény folytonosan differenciálható az a pontban.
5. Igazoljuk, hogy az f_5 függvény folytonosan differenciálható az a pontban.
6. Igazoljuk, hogy az f_6 függvénynek létezik mindenhol parciális deriváltja, a parciális derivált nem folytonos az a pontban, azonban f_6 differenciálható az a pontban.

Gradiens, divergencia és rotáció

I[A]. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^3$ és $\|\cdot\|$ az euklidészi normát jelöli.

1. $\operatorname{grad}\log\|r\|^3$	2. $\operatorname{grad}\|r\|^5$	3. $\operatorname{grad} f(\|r\|)$
4. $\operatorname{div}(\|r\| \cdot \operatorname{grad}\log\|r\|^3)$	5. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\|r\|^5$	6. $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(\|r\|)$
7. $\operatorname{rot}(a \times r)$	8. $\operatorname{rot}(\|r\|^2 \cdot a)$	9. $\operatorname{rot}(\|r\| \cdot a)$

II[Gy]. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(U_1+U_2) &= \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2 \\ \operatorname{grad}(cU_1) &= c\operatorname{grad} U_1 \\ \operatorname{grad}(U_1U_2) &= U_1\operatorname{grad} U_2 + U_2\operatorname{grad} U_1. \end{aligned}$$

2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_1+V_2) &= \operatorname{div} V_1 + \operatorname{div} V_2 \\ \operatorname{div}(cV_1) &= c\operatorname{div} V_1 \\ \operatorname{div}(UV_1) &= U\operatorname{div} V_1 + \langle V_1\rangle\operatorname{grad} U. \end{aligned}$$

3. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(V_1 + V_2) &= \operatorname{rot} V_1 + \operatorname{rot} V_2 \\ \operatorname{rot}(cV_1) &= c \operatorname{rot} V_1 \\ \operatorname{rot}(UV_1) &= U \operatorname{rot} V_1 + (\operatorname{grad} U) \times V_1.\end{aligned}$$

III$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy a kétszer folytonosan differenciálható függvények terén

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0 \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$$

teljesül. Használjuk fel a vegyes parciális deriváltak szimmetrikusságát.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $V \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, a $V = (V_1, V_2, V_3)$ komponensekkel és legyen $\Delta V = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} V = \operatorname{grad} \operatorname{div} V - \Delta V.$$

V$^{\mathrm{A}}$. Határozzuk meg, hogy mely $v \in \mathbb{R}^2$ egységvektorhoz tartozik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény legnagyobb iránymenti deriváltja az $a \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ és $a = (1, 1)$;
2. $f(x, y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ és $a = (-1, 1)$.

Laplace-operátor

I$^{\mathrm{A}}$. Laplace-operátor polárkoordinátákkal.
Legyen $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 0\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, valamint a polárkoordinátázás legyen $P : H \to G$, $P(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$.

1. Igazoljuk, hogy P differenciálható.
2. Mutassuk meg, hogy $Q : G \to H$, $Q(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\operatorname{sgn} y) \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$ a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.
3. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor
$$\begin{aligned}\frac{\partial(f \circ Q)(x, y)}{\partial x} &= \cos\varphi \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(f \circ Q)(x, y)}{\partial y} &= \sin\varphi \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$
4. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor
$$(\Delta f)(r, \varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] f(r, \varphi).$$

II$^{\mathrm{Gy}}$. Laplace-operátor gömbi koordinátákkal.
Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \leq 0\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$, valamint a gömbi koordinátázás legyen $P : H \to G$, $P(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$.

1. Igazoljuk, hogy P differenciálható.
2. Mutassuk meg, hogy $Q : G \to H$,
$$Q(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (\operatorname{sgn} y) \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.

3. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial x} &= \sin\vartheta\cos\varphi \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\varphi} \\
\frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial y} &= \sin\vartheta\sin\varphi \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \vartheta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial\varphi} \\
\frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial z} &= \cos\vartheta \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \vartheta}.
\end{aligned}$$

4. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$(\Delta f)(r,\vartheta,\varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right] f(r,\vartheta,\varphi).$$

III$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra. Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \mathbb{R})$, amit gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta\Phi = 0$, akkor a $\Psi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R}{r}\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right)$ függvényre is teljesül a $\Delta\Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter mellett.