Kalkulus 2, 10. hét

Érintősík

I$^{\text{Gy}}$. Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjainak az egyenletét.

II$^{\text{A}}$. Tekintsük az $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x, y, z\right\}$ térrészben (amelynek neve *pozitív ortáns*) a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből a összegű darabokat vágnak le. (Azaz, ha az érintősík az x', y' és z' helyen metszi a koordinátatengelyeket, akkor $x' + y' + z' = a$.)

III$^{\text{Gy}}$. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy a

$$h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

függvény érintősíkjai átmennek az origón.

Inverzfüggvény tétel

I$^{\text{Gy}}$. Legyen $E_1 = \mathbb{R}^3$ és $E_2 = \mathbb{R}^2$. Határozzuk meg az

$$f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \big((x, y, z), (u, v)\big) \mapsto \left(\frac{x^2}{1 + u^2 + \mathrm{e}^y}, vz^2\right)$$

függvény parciális deriváltjait az $a = \big((1, -1, 0), (1, 3)\big)$ pontban.

II$^{\text{Gy}}$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$.

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható.
2. Legyen $g = f^{-1}$. Igazoljuk, hogy $g'(0) = 1$ és $g'(10) = \dfrac{1}{13}$.

III$^{\text{Gy}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (u, v) \mapsto (u^3 + uv + v^3, u^2 - v^2).$$

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1, 1)$ pont egy U környezetében.
2. Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $(\mathrm{D}g)(3, 0)$ lineáris leképezést.

IV$^{\text{A}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x^3y + xz^2, x^3 + x^2 - yz, x^2 + z^2 - xyz).$$

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1, 1, 1)$ pont egy U környezetében.
2. Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $(\mathrm{D}g)(2, 1, 1)$ lineáris leképezést.

Implicitfüggvény tétel

I^{Gy}. Igazoljuk hogy az $y^2x + y^3 = 1$ egyenlet egy $y(x)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $x_0 = 0$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $y'(0)$ értékét!

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az

$$x \cos y^2 + \frac{2y}{x+2} + y = 2x$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $(0,0)$ ponton, valamint írjuk fel ennek az $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $(0,0)$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy az

$$y + x^2 \sin y + \sin x = 1$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ponton. Milyen lokális tulajdonsága van az implicit módon adott $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pontban?

IV^{A}. Igazoljuk hogy az $xy - 2\,\mathrm{e}^{x-y} - 2z + \mathrm{e}^z = 0$ egyenlet egyértelműen meghatároz az $(x_0, y_0) = (1,1)$ pont egy környezetében egy olyan $z(x,y)$ függvénykapcsolatot, melyre $z(1,1) = 0$ teljesül. Számoljuk ki $z'_x(1,1)$ és $z'_y(1,1)$ értékét!

V^{Gy}. Tekintsük az

$$\begin{aligned} x^2u + yz^2v + v^3 &= 4 \\ x^4y^2uv &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Legyen $a = (1,2,-1)$ és $b = (1,1)$. (Ekkor az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$, $u_0 = 1$ és $v_0 = 1$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer.) Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt környezete az a pontnak és olyan $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvény, melyre $\varphi(a) = b$ és minden $(x,y,z) \in \Omega$ esetén az $u = \varphi_1(x,y,z)$ és a $v = \varphi_2(x,y,z)$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer. Igazoljuk továbbá, hogy

$$(\mathrm{D}\varphi)(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

teljesül.