Kalkulus 2, 11. hét

Taylor-sorfejtés

I$^{\text{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy az

1. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ függvény $P=(0,0)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h=(a,b)$ helyen
$$T^f_{2,P}(h)=1-\frac{a^2+b^2}{2};$$
2. $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{z}$ függvény $P=(1,1,1)$ bázispontú másodfokú Taylor-polinomja a $h=(a,b,c)$ helyen
$$T^f_{3,P}(h)=1+(a+b-c-1)+\frac{1}{2}(2c^2+2ab-2ac-bc-b-c+1).$$

Lokális szélsőérték

I$^{\text{Gy}}$. Keressük meg az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit (ahol $k\in\mathbb{R}$).

$$f(x,y)=(x-2y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\qquad g(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\,\mathrm{e}^y\qquad h(x,y)=kx^2+xy+y^2+3x-3y$$

II$^{\text{A}}$. Keressük meg az f függvény szélsőértékeit a T halmazon, ahol

1. $f(x,y)=x^3+y^3+x+y$ és $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$;
2. $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ és $T=[0,\pi]^3$;
3. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+z^2$ és $T=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$;
4. $f(x,y)=x^2y(2-x-y)$ és $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 6\}$;
5. $f(x,y)=(y+2x-4)^2+(x+y)^2$ és $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 0\le x,\ 0\le y,\ x+y\le 1\}$.

III$^{\text{Gy}}$. Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit a megadott feltételek mellett.

1. Legyen $f(x,y)=xy$, az $x^2+y^2=1$, $0\le x,y$ feltétel mellett.
2. Legyen $f(x,y)=x+2y+3z$, az $x^2+y^2=2$ és az $y+z=1$ feltétel mellett.
3. Legyen $n\in\mathbb{N}^+$, $a\in\mathbb{R}^+$ és $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}$ a $\displaystyle\prod_{k=1}^n x_k=a$ és az $x_1,\dots,x_n>0$ feltétellel.

IV$^{\text{A}}$. Legyen $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, valamint legyen $x,y\in\mathbb{R}^n$, ahol $x=(x_1,\dots,x_n)$ és $y=(y_1,\dots,y_n)$. Definiáljuk a $q=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ vektort, és tegyük fel, hogy a q és az x vektor lineárisan független. Vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$\mathbb{E}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\qquad \mathbb{E}(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\qquad \mathbb{E}(xy)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_iy_i\qquad \mathbb{E}(x^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

Igazoljuk, hogy a

$$Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (\alpha,\beta)\mapsto\sum_{i=1}^n(\alpha x_i+\beta-y_i)^2$$

függvénynek az

$$\alpha_0 = \frac{\mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)}{\mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2} \quad \beta_0 = \frac{\mathbb{E}(x^2)\mathbb{E}(y) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(xy)}{\mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2}$$

pontban van lokális minimuma.

V^{H}. Tegyük fel, hogy egy edény 10 ml kénsavat tartalmaz kezdetben. Rendelkezésünkre áll 1 l víz, hogy csökkentsük a kénsav mennyiségét oly módon, hogy valamennyi vizet öntünk az edénybe, az teljesen elkeveredik a kénsavval, majd kiöntés után marad mindig 10 ml folyadék az edényben, és ezt a lépést ismételhetjük addig, amíg a rendelkezésünkre álló 1 l víz el nem fogy. Mennyi kénsav fog biztosan maradni az edényben, akármilyen módon is használjuk fel az 1 l vizet?