Kalkulus 2, 12. hét

Integrálások sorrendjének felcserélése

I^{A}. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét az integrálás sorrendjének a felcserélésével!

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x,$

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

Területszámítás és kettős integrál

I. Területszámítás.

1^{Gy}. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $d \in [0, 2R]$. A $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \le R^2,\ (x-d)^2 + y^2 \le R^2\right\}$ tartománynak mekkora a területe?

2^{A}. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$. Mekkora a $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ tartomány területe?

3^{A}. Legyen T a sík azon pontjainak a halmaza, melyek (r, φ) polárkoordinátáira $0 \le \varphi \le \pi$ és $0 \le r \le 2 + 2\sin\varphi$ teljesül. Mekkora a T tartomány területe?

II. Kettős integrál.

Adott $T \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\displaystyle\iint_T f$ integrált!

1^{Gy}. Legyen $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \ge 1,\ (x-2)^2 + y^2 \le 4\right\}$ és $f(x, y) = xy$.

2^{A}. A T halmaz az $x = 2$, $y = x$ és az $y = \dfrac{1}{x}$ görbék által határolt korlátos tartomány és $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}$.

3^{A}. Legyen $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1/2\right\}$ és $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

4^{Gy}. Legyen $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\right\}$ és $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

5^{Gy}. Legyen $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x,\ 0 \le y\right\}$ és $f(x, y) = x^2 y$.

6^{A}. Legyen $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\right\}$ és $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{9x^2 + \frac{y^2}{4}}}$.

Ívhosszszámítás és vonalmenti integrál

I. Ívhosszszámítás.

1^{Gy}. Mekkora a $\Gamma = \left\{(3\cos t, 2t, 3\sin t) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, t \in [0, 2\pi]\right\}$ görbe ívhossza?

2^{A}. Mekkora a $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x \in [1, 9],\ y = x^{\frac{3}{2}}\right\}$ görbe ívhossza?

3^{Gy}. Mekkora az $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $r(\varphi) = \varphi$ esetén az $(r(\varphi), \varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe ívhossza, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$?

4^{Gy}. Az origó középpontú $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú tenniszlabdán található görbevonal egyenlete (jó közelítéssel) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (R\cos^3(t), R\sin^3(t), \sqrt{3}\sin(t)\cos(t))$. Mekkora a görbe ívhossza?

II. Vonalmenti integrál.
Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ görbe menti integrálját, ahol

1^{A}. $f(x, y, z) = (2xy, 2z^2, -x^2 - y^2)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$;

2^{Gy}. $f(x, y, z) = (y + z^2, x + z, x + y)$ és γ az $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ háromszög oldala az $A \to B \to C \to A$ bejárással;

3^{A}. $f(x, y, z) = \left(2xy^2, 2x^2y, -2x^2y^2\right)$ és γ az $x^2 + z^2 = 1$ és az $y = 2$ felületek metszésvonala;

4^{Gy}. $f(x, y, z) = (xy, y^2, z^3)$, $I = [0, 1]$ és $\gamma(t) = (t, t^2 + 1, \exp(t))$;

5^{Gy}. $f(x, y, z) = (xy, y, 0)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ (ciklois);

6^{Gy}. $f(x, y, z) = (-y, x, 0)$ és γ_1 az $A = (0, 1, 0)$ pontból induló és a $B = (1, 0, 0)$ pontban végződő szakasz.

Felszínszámítás és felületi integrál

I. Felszínszámítás.
Határozzuk meg az alábbi felületek felszínét.

1^{Gy}. Az origó középpontú $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb.

2^{A}. Egyenes kúp palástja, ha az alapkör sugara $R \in \mathbb{R}^+$ és a kúp magassága $h \in \mathbb{R}^+$.

3^{A}. Csavarfelület, melynek paraméterezése

$$P : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u + v).$$

4^{Gy}. Tórusz, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \leq a$ és a paraméterezés

$$P : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (\vartheta, \varphi) \mapsto ((a + b\cos\varphi)\cos\vartheta, (a + b\cos\varphi)\sin\vartheta, b\sin\varphi).$$

5^{H}. Ellipszis, melynek féltengelyei a, a, b $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.

II. Felületi integrál.
Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott F felületeken.

1^{A}. Legyen $f(x, y, z) = xyz$ és F az a felület, melynek paraméterezése

$$P : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, u^2).$$

2^{Gy}. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(r) = r$ és F az $(1, 0, 0)$ középpontú 1 sugarú gömbhéj $z \geq 0$ része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1)\rangle \geq 0$ teljesüljön.

3^{A}. Legyen $v(r) = \|r\|^2 \cdot (r \times (0, 0, 1))$ és F a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \leq 1$ része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1)\rangle \geq 0$ teljesüljön.

4^{H}. Legyen $v(x, y, z) = (x, 3x, -2z)$, továbbá F legyen az $(1, 2, 3)$ csúcspontú és a $z = 1$ síkban az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ vezérgörbéjű kúp palástjának a $z = 1$ és a $z = 3$ síkok közötti része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1)\rangle \geq 0$ teljesüljön.

5^{Gy}. Legyen $v(x, y, z) = (x, y, z)$, és legyen F az

$$r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\cos v(3 + \cos u), \sin v(3 + \cos u), \sin u)$$

paraméterezésű tóruszdarab befele vett irányítással (vagyis mutasson az n normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé).