Kalkulus 2, 13. hét

Térfogatszámítás és hármas integrál

I. Térfogatszámítás.
Határozzuk meg az alábbi $V \subseteq \mathbb{R}^3$ halmazok térfogatát!

1^{Gy}. Legyen V az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengernek a $z = 0$ és az $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok közé eső része.

2^{Gy}. Legyen V az a gömbhéjcikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r = 1$ és $r = 2$ sugarú gömbök és a $\vartheta = \pi/4$ és a $\vartheta = \pi/3$ kúpok határolnak.

3^{A}. Legyen V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek közé eső rész.

4^{Gy}. Legyen V a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ henger határolt korlátos térrész.

5^{Gy}. Legyen V az $R \in \mathbb{R}^+$ középsugarú és $r \in]0, R[$ gyűrűsugarú tórusz.

6^{A}. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$.

7^{A}. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x^2 + y^2 \le R^2,\ y^2 + z^2 \le R^2\right\}$.

8^{H}. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x^2 + y^2 \le R^2,\ y^2 + z^2 \le R^2,\ x^2 + z^2 \le R^2\right\}$.

9^{H}. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xy - 4yz \le R^2\right\}$.

II. Hármas integrál.
Adott $T \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\iiint\limits_T f$ integrált!

1^{Gy}. Legyen T a $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ és a $z = 0$ egyenletek által meghatározott korlátos tartomány, és $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

2^{Gy}. Legyen T a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 1$ felületekkel határolt korlátos tartomány és $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3^{Gy}. Legyen T a $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = xyz$.

4^{A}. Legyen T a $z \ge 2$ és a $z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = 2z$.

5^{A}. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$ és a $0 \le x$, $0 \le y$, $\sqrt{3x^2 + 3y^2} \le 2z$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = xyz$.

6^{Gy}. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ és a $3z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = x^2z$.

Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel

I. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1^{A}. Legyen F a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \ge 0$ része, és az n normális vektorára teljesüljön az $\langle n, (0,0,1)\rangle \ge 0$ egyenlet. Továbbá legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = (xz, zy, yx)$. Határozzuk meg az $\iint\limits_F \operatorname{rot} v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét közvetlen számolással és a megfelelő integráltétel alkalmazásával is.

2^{A}. Számoljuk ki a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 +$

y^2, $0 \leq z \leq 1$ egyenletek által meghatározott F_1 kúpfelületen, ha a felület normálisára $\langle n, (0,0,1)\rangle \leq 0$ teljesül; valamint a $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$ egyenletek által meghatározott F_2 körlapon, ha a felület normálisára $\langle n, (0,0,1)\rangle \geq 0$ teljesül. Integráltétel segíségével számoljuk ki $\iint\limits_{F_1} v + \iint\limits_{F_2} v$ értékét közvetlenül is.

3$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (x, y, -2z)$ és legyen F az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle n, (0, 1, 0)\rangle\rangle \geq 0$ irányítással, ahol n a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\iint\limits_{F} v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét.

4$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \geq 0$ része. Határozzuk meg az $\iint\limits_{F} v \, \mathrm{d}F$ integrál értékét.