Kalkulus 2, 14. hét

Fourier-sor

I$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk a $[-\pi,\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x) = \pi - x$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}$

2. $f(x) = |\sin x|$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$

3. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$

4. $f(x) = \pi - \frac{x^2}{\pi}$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x) = \frac{2\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos(kx)}{k^2}$

II. Tekintsük azt az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π szerint periodikus függvényt, melyre minden $x\in[0,2\pi[$ esetén

$$f(x) = x^2(2\pi - x)^2$$

teljesül.

1. Mutassuk meg, hogy f kétszer folytonosan differenciálható.
2. Igazoljuk (esetleg számítógép segítségével), hogy az f függvény $[0,2\pi]$ intervallumon vett Fourier-sorára
$$\mathcal{S}(f)(x) = \frac{8\pi^4}{15} - 48\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^4}$$
teljesül.
3. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$ teljesül.