Kalkulus 2.

1. Zárthelyi dolgozat

2022. 04. 08. 8.15-9.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Legyen $f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. (5 + 5 p.)
   a.) Írja fel az f függvény $a = 0$ pont körüli elsőfokú Taylor-polinomját.
   b.) Legyen $b = \dfrac{1}{10}$ és a függvény értékét a b pontban közelítsük az elsőfokú Taylor-polinom b pontban felvett értékével. Ezek alapján igazolja, hogy $\left|\sqrt{1.1} - \dfrac{21}{20}\right| \le \dfrac{1}{800}$.

2. Legyen $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y < 4 - x^2\right\}$. (3 + 5 + 4 p.)
   a.) Vázlatosan rajzolja fel az A halmazt.
   b.) Adja meg az A belső és torlódási pontjait.
   c.) Adja meg az $\overline{A}$ halmazt.

3. Határozza meg a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ és a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ határértéket, ha az létezik. (4 + 4 p.)

4. Legyen $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{\sin(x)}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{4}$. (5 + 5 p.)
   a.) Mutassa meg, hogy f kontrakció.
   b.) Igazolja, hogy létezik egyetlen olyan $0 < a$ szám, melyre $a = 1 + \dfrac{\sin(a)}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{4}$ teljesül.

5. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n \log\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$. (5 + 5 p.)
   a.) Határozza meg az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényét.
   b.) Igazolja, hogy $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$ teljesül.

6. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n + n^3}$. (10 p.)
   a.) Igazolja, hogy az $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.
   b.) Mutassa meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1 + n^2}$.