

Kalkulus 2 (4+2+2 óra, 8 kr)

1. Az n -dimenziós euklideszi tér, többváltozós függvények

Skaláris szorzás és az indukált euklideszi norma \mathbb{R}^n -en. Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség. A norma alaptulajdonságai. Példák: p -normák \mathbb{R}^n -en. Az n -dimenziós euklideszi tér topológiája (nyílt, zárt, kompakt halmazok, belső pont, határpont), Cauchy sorozatok, \mathbb{R}^n teljessége. Borel-Lebesgue tétel kompakt halmazokra (esetleg biz. nélkül). Függvény határértéke, folytonossága. Folytonosság topologikus jellemzése, folytonos függvény színhalmazainak nyíltsága, zártsága. Konvex halmazok, külső pont és konvex halmaz szeparációja, diszjunkt konvex halmazok szeparációja (esetleg biz. nélkül).

2. Többváltozós differenciálhatóság

Differenciálható függvény. Parciális és iránymenti deriváltak, gradiens, érintősík. Jacobi-mátrix, Jacobi-determináns, láncszabály. Folytonos differenciálhatóság, többszörös deriválás, Young tétele, Taylor formula (különösen másodrendben). Multilineáris leképezés pozitív, negatív definitisége. Konvex függvények és kapcsolatuk a második deriválttal. Lokális szélsőérték, jellemzése a függvény deriváltjaival. Feltételes szélsőérték, Lagrange-multiplikátor. Banach-féle fixpont-tétel, inverzfüggvény-tétel, implicitfüggvény-tétel. Rotáció, divergencia, nabla-szimbólum, Laplace-operátor. Potenciálfüggvény létezése.

3. Többváltozós integrálás, vektoranalízis

A Jordan mérték definíciója és tulajdonságai (bizonyítások nélkül). Többváltozós folytonos függvény integrálása normáltartományon. Helyettesítéses integrálás, polár- és gömbi koordinátás helyettesítés. Vonalmenti és felületi integrálás. Gauss-Osztrogradszkij és Stokes tétele, Green-tételek (az integráltételek bizonyítása csak szemléletesen történik).

4. Függvénysorozatok és függvénysorok

A pontonkénti határfüggvény, illetve a pontonkénti összegfüggvény. Függvénysor abszolút konvergenciája. Függvénysorozat és függvénysor egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Folytonos függvények tere a sup-normával, Weierstrass-kritérium. A differenciálás illetve integrálás felcserélhetősége a limessel, függvénysorok tagonkénti differenciálása és integrálása. Ismétlés: hatványsorok tulajdonságai.

5. Fourier-sorfejtés

Fourier-együttható, Fourier-sor. Tétel a kétszer folytonosan differenciálható periodikus függvények Fourier-soráról.