

## Kalkulus 2, 12. hét

### Integrálok

I. Legyen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az  $[a, b]$  intervallumon.

Ekkor  $\Gamma := \gamma([a, b])$  egy *görbe*,  $\gamma$  pedig egy *paraméterezése*.

A  $\Gamma$  görbe ívhossza:  $l(\Gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ .

Ha  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, hogy  $\Gamma \subseteq \text{Dom } f$ , akkor az  $f$  függvény  $\Gamma$  görbementi integrálja:

$$\int_{\Gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Ha  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  olyan folytonos függvény, hogy  $\Gamma \subseteq \text{Dom } f$ , akkor az  $f$  függvény  $\Gamma$  görbementi integrálja:

$$\int_{\Gamma} v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

II. Legyen  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  halmazon, homeomorfizmus és minden  $x \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  esetén a  $(Dp)(x)$  mátrix rangja 2.

Ekkor  $F := p([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$  egy *felület*,  $p$  pedig egy *paraméterezése*.

Az  $F$  felület normálisa:

$$n : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x_1, x_2) \mapsto (\partial_1 p)(x_1, x_2) \times (\partial_2 p)(x_1, x_2).$$

Az  $F$  felület felszíne:  $A(F) := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \|n(u, v)\|_2 dv du$ .

Ha  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, hogy  $F \subseteq \text{Dom } f$ , akkor az  $f$  függvény  $F$  felületmenti integrálja:

$$\int_F f := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(p(u, v)) \cdot \|n(u, v)\| dv du.$$

Ha  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan folytonos függvény, hogy  $F \subseteq \text{Dom } f$ , akkor az  $f$  függvény  $F$  felületmenti integrálja:

$$\int_F v := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \langle v(p(u, v)), n(u, v) \rangle dv du.$$

III. Legyen  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  halmazon és minden  $x \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  pontban  $\det((DP)(x)) > 0$ .

Ekkor  $\Omega := P([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3])$  egy *tartomány*,  $P$  pedig egy *paraméterezése*.

A  $P$  paraméterezéshez tartozó *Jacobi-determináns*:

$$J_P : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R} \quad (u, v, w) \mapsto \det((DP)(u, v, w)).$$

Az  $\Omega$  tartomány térfogata:  $V(\Omega) := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} J_P(u, v, w) \, dw \, dv \, du$ .

Ha  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, hogy  $\Omega \subseteq \text{Dom } f$ , akkor az  $f$  függvény  $\Omega$  tartományon vett térfogati integrálja:

$$\int_{\Omega} f := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(P(u, v, w)) \cdot J_P(u, v, w) \, dw \, dv \, du.$$

## Potenciál

A  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező *potenciálos*, ha létezik olyan  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény melyre  $\text{Dom } v \subseteq \text{Dom } U$  és minden  $x \in \text{Dom } v$  esetén  $v(x) = (\text{grad } U)(x)$  teljesül. Ekkor  $U$  a  $v$  *skalárpotenciálja*.

Ha  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  folytonosan differenciálható,  $\text{Dom } v$  csillagszerű halmaz és minden  $x \in \text{Dom } v$  pontban  $(\text{rot } v)(x) = 0$ , akkor  $v$  potenciálos.

A  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormező *vektorpotenciálos*, ha létezik olyan  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenciálható vektormező melyre  $\text{Dom } v \subseteq \text{Dom } A$  és minden  $x \in \text{Dom } v$  esetén  $v(x) = (\text{rot } A)(x)$  teljesül. Ekkor  $A$  a  $v$  *vektorpotenciálja*.

Ha  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  folytonosan differenciálható,  $\text{Dom } v$  csillagszerű halmaz és minden  $x \in \text{Dom } v$  pontban  $(\text{div } v)(x) = 0$ , akkor  $v$  vektorpotenciálos.

## Integrál formulák

*Newton–Leibniz-tétel.* Legyen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az  $[a, b]$  intervallumon. Legyen  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan potenciális vektormező, melyre  $\gamma([a, b]) \subseteq \text{Dom } v$  teljesül és legyen  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $v$  vektormező potenciálja. Ekkor

$$\int_{\gamma([a,b])} v = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

*Gauss–Ostrogradskij-tétel.* Legyen az  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  tartomány, valamint legyen  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan vektormező, mely kétszer folytonosan differenciálható az  $\Omega$  halmazon. Ekkor

$$\int_{\Omega} \text{div } v = \int_{\partial\Omega} v,$$

ahol  $\partial\Omega$  felületet úgy kell irányítani, hogy a normálvektora kifelé mutasson az  $\Omega$  tartományból.

*Stokes-tétel.* Legyen az  $F \subseteq \mathbb{R}^3$  felület, valamint legyen  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  olyan vektormező, mely kétszer folytonosan differenciálható az  $F$  halmazon. Ekkor

$$\int_F \text{rot } v = \int_{\partial F} v,$$

ahol  $\partial F$  görbét úgy kell irányítani, hogy az  $F$  felület normálvektorával jobbsodrású rendszert alkosson.