Kalkulus 2, 13. hét

Fizikai alkalmazások

I. Tegyük fel, hogy a Föld egy végtelen kiterjedésű d vastagságú korong, melynek sűrűsége $\rho = 5500\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Mekkora d esetén tapasztaljuk közel a Földhöz az $a = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gravitációs gyorsulást?

Útmutatás: A korong legyen a $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \le z \le h+d\right\}$ tartomány, és az m tömegű test legyen az origóban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás

$$ma = \int_h^{h+d}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{Gm\rho r z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi d G m \rho.$$

Vagyis $d = \frac{a}{2\pi\rho G} \approx 4256$ km.

II. Tegyük fel, hogy egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb, melynek sűrűsége a középpontjától $r \in [0,R]$ távolságra $\rho(r)$, ahol $\rho \in C([0,R], \mathbb{R}^+)$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a gömb felszínétől $h \in \left]-R,\infty\right[$ távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a gömb belsejében van a test)?

Útmutatás: Olyan koordinátázást választunk, melyben az integrálási határok egyszerűbbek, viszont ilyenkor az integrálandó függvények bonyolultabbak. A gömb középpontja legyen az origóban, és az m tömegű test legyen a $(0,0,R+h)$ pontban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás (gömbi koordinátarendszerben)

$$ma = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\pi} Gm\rho(r)\frac{r^2\sin\vartheta(R+h-r\cos\vartheta)}{\left(r^2\sin^2\vartheta+(R+h-r\cos\vartheta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Az

$$\int \frac{\sin\vartheta(a-\cos\vartheta)}{\left(\sin^2\vartheta+(a-\cos\vartheta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1-a\cos\vartheta}{a^2\sqrt{1+a^2-2a\cos\vartheta}} + C$$

integrál felhasználásával

$$ma = \frac{Gm}{(R+h)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho(r)r^2\left(1+\operatorname{sgn}\left(\frac{R+h}{r}-1\right)\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

adódik.
A $h \ge 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R+h)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\pi}\rho(r)r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM}{(R+h)^2},$$

ahol M a gömb össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a gömb összes tömege a középpontjában lenne.
A $-R < h < 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R+h)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R+h}\int_0^{\pi}\rho(r)r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM_h}{(R+h)^2},$$

ahol M_h a test alatt lévő gömb össztömege. Tehát ebben az esetben nem számít, hogy a test felett még mekkora gömbhéj található.

III. Tegyük fel, hogy a kétdimenziós térben egymástól r távolságra lévő m_1 és m_2 tömegű pontszerű testek közötti gravitációs erő

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r}.$$

A kétdimenziós térben legyen egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú körlap sűrűsége a középpontjától $r \in [0, R]$ távolságra $\rho(r)$, ahol $\rho \in C([0, R], \mathbb{R}^+)$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a körlap szélétől $h \in]-R, \infty[$ távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a körlap belsejében van a test)?

Útmutatás: Az előző feladat megoldásmenete alkalmazható. A $h \geq 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM}{R+h},$$

ahol M a körlap össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a körlap összes tömege a középpontjában lenne.
A $-R < h < 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM_h}{R+h},$$

ahol M_h a próbatest alatt lévő körlap össztömege.

IV. Tekintsünk a háromdimenziós térben egy $\rho \in \mathbb{R}^+$ sűrűségű $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z \geq 0$$

félgömböt. Hol nagyobb a gravitációs gyorsulás, a $(0, 0, 0)$ vagy a $(0, 0, R)$ pontban?

Útmutatás: A $(0, 0, 0)$ pontban a gravtiációs gyorsulás legyen a_1, a $(0, 0, R)$ pontban pedig a_2.
Az első esetben legyen a

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő m tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta = \pi Gm\rho R,$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a $(0, 0, 0)$ pontban

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{GM}{R^2},$$

ahol M a félgömb össztömege.
A második esetben legyen a

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2,\ z \leq R\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő m tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{R}{\cos\vartheta}} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\vartheta} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta = 2\pi Gm\rho R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a $(0, 0, 0)$ pontban

$$a_2 = (3 - \sqrt{2}) \cdot \frac{GM}{R^2}.$$

Tehát $a_2 > a_1$.

V. Az $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű homogén (egyenletes sűrűségű) test *tehetetlenségi nyomatékát* egy rögzített tengely körül a

$$\Theta = \rho \cdot \iiint_V f(x, y, z) \,\mathrm{d}\,V$$

kifejezés adja, ahol ρ a test sűrűsége ($\rho = \frac{M}{V}$) és $f(x, y, z)$ a test (x, y, z) koordinátájú pontjának a forgástengelytől vett távolságának a négyzete. Igazoljuk, hogy

1. az M tömegű R sugarú gömbnél a középponton átmenő tengely esetén

$$\Theta = \frac{2}{5} M R^2$$

és a gömböt érintő tengely esetén

$$\Theta = \frac{7}{5} M R^2;$$

2. az M tömegű h magasságú R alapsugarú egyenes kúpnál a kúp szimmetriatengelye mentén fekvő forgástengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{10} M R^2$$

a kúp csúcsán átmenő, a szimmetriatengelyre merőleges tengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{5} M \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right)$$

a kúp egy alkotóegyenese mint tengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{R^2 + h^2} \left(R^2 + 6h^2 \right).$$