

Minimumkövetelmény

Kalkulus 2, 2023/24 II. félév

Az alábbi fogalmaknak az ismerete szükséges.

1. Véges dimenziós terek topológiája.

Skaláris szorzás. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Norma. Nyílt, zárt és korlátos halmaz. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Halmaz belseje és lezártja. Sorozat határértéke. Cauchy-sorozat. Teljes halmaz. Kompakt halmaz. Cantor-féle közösrész-tétel. Heine–Borel-tétel. Bolzano–Weierstrass-tétel. Függvény határértéke. Átviteli elv határértékre. Függvény folytonossága egy pontban és folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Weierstrass-féle maximum- minimum elv. Nyílt függvény. Homeomorfizmus. Egyenletesen folytonos függvények. Heine-tétel. Normák ekvivalenciája. Operátornorma. Operátornorma szubmultiplikativitása. Carl–Neumann-féle sor. Multilineáris leképezés normája. Pozitív (negatív), pozitív (negatív) definit és indefinit multilineáris leképezés. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel. Diszjunkt konvex zárt és kompakt halmaz szétválasztása.

2. Függvénysorozatok és függvénysorok.

Függvénysorozat határfüggvénye, pontonkénti, egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Függvénysor határfüggvénye, pontonkénti, abszolút, egyenletes és lokálisan egyenletes konvergenciája. Függvénysor egyenletes konvergenciájáról szóló Weierstrass-tétel. Függvénysorozat és függvénysor tagonkénti differenciálhatósága és integrálhatósága. Hatványsorok. Konvergenciasugár, Cauchy–Hadamrad-tétel és Abel-tétel hatványsorokról. Bernstein-polinom.

3. Differenciálszámítás véges dimenzióban.

Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény deriváltja. Az összetett függvény deriválási szabálya. Iránymenti derivált. Parciális derivált. Differenciálható függvény Jacobi-mátrixa és Jacobi determinánsa. Gradiens, divergencia és rotáció. Inverzfüggvény tétel. Implicitfüggvény tétel. Schwarz-tétel (Clairaut tétele a vegyes parciális deriváltakról). Függvény Taylor-polinomja és Taylor-sora. Taylor-formula skalárértékű függvényekre. Lokális maximum, minimum, szigorú maximum, szigorú minimum, lokális szélsőérték és szigorú lokális szélsőérték. A lokális szélsőérték jellemzése nem elfajult második deriválttal rendelkező skalárfüggvény esetén. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Kétszer differenciálható függvény (szigorú) konvexitásának és az első, illetve a második deriváltjának a kapcsolata.

4. Integrálszámítás.

Térgörbe ívhossza. Skalár- és vektorértékű függvény vonalmenti integrálja. Felület normálvektora és felszíne. Skalár- és vektorértékű függvény felületi integrálja. Tér-tartomány térfogata. Skalárértékű függvény integrálja tértartományon. Stokes-tétel és Gauss–Osztrogradszkij-tétel. Polár, henger és gömbi koordináták és Jacobi-determinánsuk.

5. Fourier-sorfejtés.

Trigonometrikus polinom. Fourier-együtthatók és Fourier-sor.